

# Podpora výuky předmětu "Teorie automatického řízení I"

Petr Žajdlík

---

Bakalářská práce  
2006



Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky

---

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně  
Fakulta aplikované informatiky  
Ústav automatizace a řídicí techniky  
akademický rok: 2005/2006

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Petr ŽAJDLÍK**  
Studijní program: **B 3902 Inženýrská informatika**  
Studijní obor: **Automatické řízení a informatika**

Téma práce: **Podpora výuky předmětu "Teorie automatického řízení I"**

Zásady pro vypracování:

1. Seznamte se s obsahovou náplní přednášek a cvičení předmětu Teorie automatického řízení I a programovým prostředím Matlab/Simulink.
2. Vypracujte návrhy obecných zadání zápočtových protokolů se zaměřením na analýzu a syntézu jednorozměrných a mnohorozměrných lineárních spojitých dynamických systémů.
3. Všechna zadání vzorově vyřešte pro vybrané konkrétní hodnoty parametrů, včetně vytvoření souvisejících programů a simulačních schémat.
4. Vytvořené materiály zpracujte do formy vhodné pro publikaci na Internetu.

Rozsah práce:

Rozsah příloh:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

[1] Prokop, R., Matušů, R., Prokopová, Z.: **Teorie automatického řízení – lineární spojité dynamické systémy. Rukopis, skriptum FAI UTB ve Zlíně, 2006.**

[2] Balátě, J.: **Automatické řízení. BEN – technická literatura, Praha, 2003.**

[3] Švarc, I.: **Automatizace Automatické řízení. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2002.**

[4] Šulc, B., Vítečková, M.: **Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004.**

Vedoucí bakalářské práce:

**Ing. Radek Matušů**

Ústav automatizace a řídicí techniky

Datum zadání bakalářské práce:

**14. února 2006**

Termín odevzdání bakalářské práce:

**16. června 2006**

Ve Zlíně dne 14. února 2006

prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*pověřený děkan*



prof. Ing. Vladimír Vašek, CSc.  
*ředitel ústavu*

## **ABSTRAKT**

### **Abstrakt česky**

Tato bakalářská práce se zabývá vzorovým vypracováním zápočtových protokolů spolu s návrhem zadání příkladů pro studenty, to vše k předmětu „*Teorie automatického řízení I*“. Konkrétně půjde o vnější popis a analýzu LSDS a v druhé řadě se budeme zabývat syntézou regulačních obvodů a jeho vnitřním popisem. Dalším cílem je shrnout pro tento předmět vyučovanou látku, se kterou se studenti seznají na přednáškách. Přednášky obsahově vychází ze skript „*Teorie automatického řízení - lineární spojité dynamické systémy*“ od autorů: Prokop, R., Matušů, R., Prokopová, Z. K vytvoření simulačních schémat použijeme program MATLAB+SIMULINK od firmy The MathWorks, Inc.

## **ABSTRACT**

### **Abstrakt ve světovém jazyce**

My thesis deals with the realization of patterns build up include protocol with concept range specification sample for students, that all for subject “*Theory of automatic process control I.*” Specifically, the external (input-output) description and analysis of LSDS are considered and next the synthesis of control systems and state-space description problems are solved. The next objective is to summarize the subject matter, which are students acquaint with during chalk talks. Its content was taken from publication “*Teorie automatického řízení - lineární spojité dynamické systémy*”, written by: Prokop, R., Matušů, R., Prokopová, Z. The program environment MATLAB+SIMULINK from The MathWorks, Inc. has been utilized for creation of simulation schemes.

Děkuji Ing. Radkovi Matušů za vedení mé bakalářské práce, za jeho věcné připomínky v průběhu řešení práce, poskytnuté materiály a ochotu při řešení problémů.

Ve Zlíně, 16. 06. 2006

.....

podpis

**OBSAH**

ÚVOD.....	8
<b>1 SHRUTÍ UČIVA PŘEDNÁŠKOVÉ ČÁSTI.....</b>	<b>9</b>
Úvod do teorie systémů .....	9
Lineární spojitě dynamické systémy .....	9
Spojitě regulátory a metody jejich nastavení.....	10
Polynomiální metody návrhu regulátorů .....	10
Mnohorozměrné systémy .....	10
Popis systémů ve stavovém prostoru.....	10
<b>2 PŘÍKLADY VÝPOČTŮ ZÁPOČTOVÝCH PROTOKOLŮ .....</b>	<b>12</b>
<b>2.1 Protokol č.1 – vnější popis a analýza LSDS periodického systému.....</b>	<b>12</b>
2.1.1 Stanovení přenosové funkce LSDS .....	12
2.1.2 Určení nul, pólů, řádu a relativního řádu LSDS .....	12
2.1.3 Rozhodnutí o stabilitě, kmitavosti a fázovosti LSDS .....	13
2.1.4 Výpočet přechodové funkce a vykreslení přechodové charakteristiky .....	13
2.1.5 Výpočet impulsní funkce a vykreslení impulsní charakteristiky .....	15
2.1.6 Výpočet frekvenčního přenosu LSDS a jeho upravení.....	17
2.1.7 Vykreslení Nyquistovy křivky .....	19
2.1.8 Vykreslení Bodeho křivky.....	20
2.1.9 Závěr protokolu č.1 – vnější popis a analýza LSDS periodického systému.....	21
<b>2.2 Protokol č.1 - vnější popis a analýza LSDS aperiodického systému .....</b>	<b>23</b>
2.2.1 Vyjádření přenosové funkce LSDS .....	23
2.2.2 Stanovení nul, pólů, řádu a relativního řádu LSDS .....	24
2.2.3 Rozhodnutí o stabilitě, kmitavosti a fázovosti LSDS .....	24
2.2.4 Výpočet přechodové funkce a vykreslení přechodové charakteristiky .....	25
2.2.5 Výpočet impulsní funkce a vykreslení impulsní charakteristiky .....	27
2.2.6 Určení frekvenčního přenosu LSDS a jeho úprava .....	28
2.2.7 Vykreslení Nyquistovy křivky .....	29
2.2.8 Vykreslení Bodeho křivky.....	30
2.2.9 Závěr protokolu č.1 – vnější popis a analýza LSDS pro aperiodickou soustavu .....	32
<b>2.3 Protokol č.2 – syntéza RO a vnitřní popis pro periodickou soustavu .....</b>	<b>33</b>
2.3.1 Návrh spojitěho regulátoru pomocí kritéria stability.....	34
2.3.2 Spojitý regulátor navržený dvěma klasickými metodami.....	35
2.3.3 Aplikace dopravního zpoždění na daný systém a jeho řízení.....	39
2.3.4 Návrh struktury řízení pro 1DOF a 2DOF konfiguraci .....	41
2.3.5 Popis systému ve stavovém prostoru, říditelnost a pozorovatelnost systému .....	48
2.3.6 Závěr protokolu č.2 – syntéza RO a vnitřní popis pro periodickou soustavu.....	50
<b>2.4 Protokol č.2 – syntéza RO a vnitřní popis pro aperiodickou soustavu .....</b>	<b>52</b>
2.4.1 Regulátor navržený pomocí kritéria stability .....	52
2.4.2 Návrh regulátoru dvěma klasickými metodami.....	53
2.4.3 Přidání dopravního zpoždění na daný systém a jeho řízení.....	56
2.4.4 Návrh struktury řízení pro 1DOF a 2DOF konfiguraci .....	57
2.4.5 Popis systému ve stavovém prostoru, říditelnost a pozorovatelnost systému .....	63
2.4.6 Závěr protokolu č.2 – syntéza RO a vnitřní popis pro aperiodickou soustavu.....	65
<b>2.5 Protokol č.3 mnohorozměrový systém .....</b>	<b>67</b>
2.5.1 Určení levého a pravého maticového zlomku .....	67
2.5.2 Rozhodnutí o stabilitě systému.....	68
2.5.3 Návrh spojitěho dvourozměrného regulátoru .....	69
2.5.4 Závěr protokolu č.3 mnohorozměrný systém .....	71
<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>74</b>
<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY .....</b>	<b>75</b>
<b>SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK.....</b>	<b>76</b>

<b>SEZNAM OBRÁZKŮ.....</b>	<b>78</b>
<b>SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>79</b>
<b>SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>80</b>

## ÚVOD

Úspěšný rozvoj automatizace a její řízení je podpořen dostatečným zabezpečením technickými prostředky. K tomu, aby mohl být dále rozvíjen a realizován přechod od mechanizace a dílčí automatizace a její řízení k automatizaci komplexní, aby mohly být využity vypracované teorie, je třeba mít příslušnou součástkovou a přístrojovou základnu. Prostředky automatického řízení prodělaly při svém rozvoji několik částí. Z počátku to byla měření samotných veličin charakterizující jednotlivé výrobní procesy. Poté následovalo díky rozvoji telemechaniky centrální shromažďování informací z mnoha měřících míst do dozorny, tak bylo umožněno plně proniknout technikům do průběhu samotného procesu. V dalším stupni vývoje byla realizace automatického ovládání a regulace. K těmto především analogovým prostředkům automatického řízení se v neposlední řadě přidaly i prostředky číslicové. V dnešní době se přistupuje k využívání řídicích počítačů pro přímé číslicové řízení i pro automatickou optimalizaci průběhu řízených procesů. Vznikají tak čím dál lepší zařízení na zpracování samotných dat a prostředky pro zlepšení komunikace mezi strojem a člověkem.

Kybernetika, jako samostatný vědní obor zaznamenal v posledních letech velký rozvoj. Zabývá se zejména zkoumáním a popisem dějů a zákonitostí u hmotných dynamických objektů, především se zaměřením na živou i neživou přírodu, ale i na umělé objekty. Zkoumá je jako soubory tvořené systémy prvků, které se na vzájem ovlivňují a působí na sebe. Popisuje a vyhodnocuje jejich vlastnosti a chování z pohledu toku informace mezi prvky. Využívá především poznatků matematiky, fyziky, biologie a moderní techniky. Můžeme říct, že je vědou hledající neustále nové vazby mezi různými obory.

Automatizace jako vědní obor mě zaujala natolik, že jsem se rozhodl zaměřit tuto bakalářskou práci na shrnutí vyučované látky pro předmět „*Teorie automatického řízení I*“, návrh konkrétních číselných hodnot jednotlivých soustav pro studenty a vzorově vypracovat zápočtové protokoly. Tedy zaměřit se hlavně na vnější popis a analýzu LSDS a v druhé řadě na syntézu regulačních obvodů a jeho vnitřním popisem.



# 1 SHRnutí UČIVA PŘEDNÁŠKOVÉ ČÁSTI

## Úvod do teorie systémů

### Historie, základní pojmy kybernetiky a teorie řízení

### Systém a jeho klasifikace

### Matematické modely a řízení

- Příklady systémů a modelů

### Abstrakce systému, zpětná vazba

### Regulační obvod, veličiny a systémy v regulačním obvodu

## Lineární spojité dynamické systémy

### Řešení lineárních diferenciálních rovnic

### Laplaceova transformace

- Heavisideův rozvoj
- Definice a účel použití
- Vlastnosti LT, vzory a obrazy funkcí
- Využití LT pro řešení diferenciálních rovnic
- Zpětná LT, věta o residuích

### Popis spojitých lineárních dynamických systémů

- Diferenciální rovnice a přenosová funkce
- Nuly a póly LSDS, řád a relativní řád
- Přejchodová a impulsová funkce a jejich charakteristiky
- Popis systémů ve frekvenční oblasti (Nyquistova křivka)
- Logaritmické frekvenční charakteristiky, rezonance

### Systémy s dopravním zpožděním

### Stabilita a jejich kritéria

- Nutná podmínka stability, stabilní a nestabilní polynomy
- Stabilita LSDS, Ljapunovská a BIBO stabilita
- Algebraická kritéria stability
- Geometrická kritéria stability

### Mejerovo kritérium

### Bloková algebra a vztahy mezi systémy

**Rozvětvené regulační obvody**

- Regulační obvod s kompenzací poruchy
- Regulační obvod s pomocnou akční veličinou
- Regulační obvod s pomocnou řízenou veličinou – vlečná regulace
- Regulační obvod pro kompenzaci dopravního zpoždění – Smithův prediktor

**Spojité regulátory a metody jejich nastavení**

- Nastavení z kritického zesílení (Ziegler–Nicholsova metoda)
- Využití kritéria stability pro návrh regulátorů
- Nastavení z přechodové charakteristiky (aperiodického typu)
- Nastavení z přechodové charakteristiky (Åströмова úprava)
- Naslinova metoda
- Whitleyovy standardní tvary
- Cohen-Coonova metoda
- Chin, Hrones a Reswickova metoda (CHR metoda)

**Polynomiální metody návrhu regulátorů****Okruhy a tělesa****Diofantické rovnice****Návrh regulátorů v základních konfiguracích systému řízení**

- Analýza obvodu se strukturou 1DOF
- Analýza obvodu se strukturou 2DOF

**Mnohorozměrné systémy****Popis a stabilita mnohorozměrných systémů****Syntéza mnohorozměrného regulačního obvodu****Popis systémů ve stavovém prostoru****Převod stavového popisu na přenos****Převod přenosu na stavový popis**

- Diferenciální rovnice bez derivace na pravé straně
- Diferenciální rovnice s derivací na pravé straně
- Metoda postupné integrace

## **Singulární systémy**

### **Neminimální realizace**

#### **Řešení stavových rovnic**

- Homogenní stavová rovnice
- Nehomogenní stavová rovnice

#### **Vlastnosti systémů**

- Řiditelnost a dosažitelnost
- Pozorovatelnost a rekonstruovatelnost

## 2 PŘÍKLADY VÝPOČTŮ ZÁPOČTOVÝCH PROTOKOLŮ

### 2.1 Protokol č.1 – vnější popis a analýza LSDS periodického systému

Jednorozměrný lineární spojité dynamický systém je dán diferenciální rovnicí:

$$a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \quad (1)$$

Dosaďte hodnoty do (1) podle vašeho individuálního zadání a k tomuto systému vypracujte následující úkoly:

#### 2.1.1 Stanovení přenosové funkce LSDS

*Napište přenosovou funkci zadaného systému, uvažujte přitom nulové počáteční podmínky:*

$$y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 4u(t)$$

Uvažujeme nulové počáteční podmínky:

$$y'(0) = z(0) = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = 4U(s)$$

$$s^2 Y(s) + sY(s) + 2Y(s) = 4U(s)$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + s + 2) = 4U(s)$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} \cdot U(s)$$

Po úpravě obdržíme přenosovou funkci ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + s + 2}$$

#### 2.1.2 Určení nul, pólů, řádu a relativního řádu LSDS

*Určete nuly, póly, řád a relativní řád systému:*

Nuly:

Tento dynamický systém má dvě nuly v nekonečnu.

Póly:

Vyřešíme rovnici  $s^2 + s + 2 = 0$  a tím dostaneme příslušné póly:

$$D = -2,6458$$

$$p_1 = -0,5 + j1,3229$$

$$p_2 = -0,5 - j1,3229$$

Řád:

Řád systému je druhý, což vidíme ze stupně polynomu jmenovatele.

Relativní řád je taktéž druhý, rovná se stupeň jmenovatele mínus stupeň čitatele.

### 2.1.3 Rozhodnutí o stabilitě, kmitavosti a fázovosti LSDS

**Rozhodněte o stabilitě, periodicitě (kmitavosti) a fázovosti systému:**

System je druhého řádu, všechny koeficienty jsou kladné – nutná podmínka stability.

Nutná podmínka stability je zároveň postačující podmínkou stability. Z toho vyplývá, že systém je stabilní.

Kořeny jsou komplexně sdružené, proto je systém periodický.

System je minimálně fázový, protože žádná nula (kořen čitatele) neleží v pravé komplexní polorovině.

### 2.1.4 Výpočet přechodové funkce a vykreslení přechodové charakteristiky

*Analyticky vypočítejte přechodovou funkci a na jejím základě vykreslete přechodovou charakteristiku. Charakteristiku pak získejte také pomocí příkazů MATLABu (Control System Toolbox) a výsledky porovnejte.*

**Pomocí slovníku LT s využitím metody neurčitých koeficientů:**

Máme soustavu ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s^2 + s + 2}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} \cdot U(s)$$

Reakce soustavy na jednotkový skok:  $U(s) = \frac{1}{s}$

Aplikujeme LT:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Rightarrow \text{Originál} \quad (2)$$

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} \Rightarrow \text{Obraz}$$

Rozložíme na parciální zlomky a vypočítáme příslušné koeficienty:

$$H(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{1,3229D}{(s+0,5)^2 + 1,3229^2} + \frac{E(s+0,5)}{(s+0,5)^2 + 1,3229^2}$$

$$A((s+0,5)^2 + 1,3229^2) + 1,3229Ds + Es(s+0,5) = 4$$

$$s = 0 \Rightarrow A((0+0,5)^2 + 1,3229^2) + 0 + 0 = 4$$

$$A = 2$$

$$s = -0,5 \Rightarrow 2(0 + 1,3229^2) + 1,3229D(-0,5) + 0 = 4$$

$$3,5 - 0,6614D = 4$$

$$D = -0,7559$$

$$s = 1 \Rightarrow 2((1+0,5)^2 + 1,3229^2) + 1,3229(-0,7559) + E(1+0,5) = 4$$

$$8 - 1 + E1,5 = 4$$

$$E = -2$$

Po výpočtu a úpravě pomocí zpětné LT obdržíme přechodovou funkci ve tvaru:

$$h(t) = A + De^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t + Ee^{-0,5t} \cdot \cos 1,3229t$$

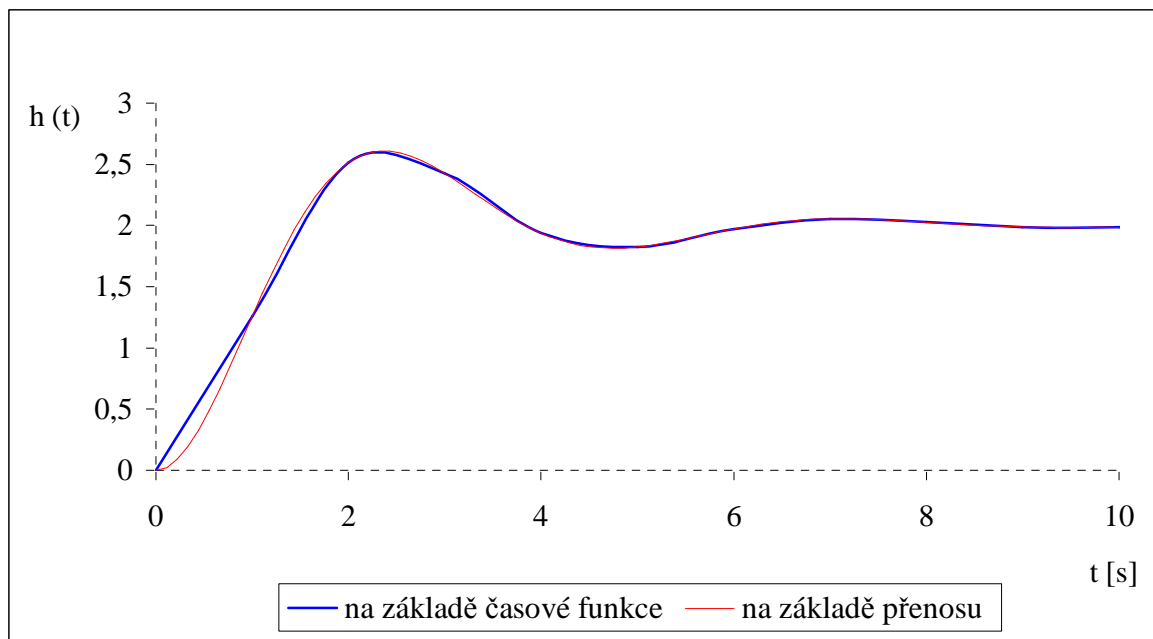
$$h(t) = 2 - 0,7559e^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t - 2e^{-0,5t} \cdot \cos 1,3229t \quad (3)$$

Počáteční a koncový bod určíme limitně:

$$h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot H(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \cdot \frac{G(s)}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4}{s^2 + s + 2} = 0$$

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot H(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{G(s)}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{s^2 + s + 2} = \frac{4}{2} = 2$$

Vypočítat přechodovou funkci lze i pomocí jiných metod, a to - pomocí slovníku LT s využitím Heavisideova rozvoje, nebo za pomoci reziduí



Obr.1 Přechodová charakteristika pro periodickou soustavu

Hodnoty pro vykreslení přechodové charakteristiky získáme jednak výpočtem na základě časové funkce (3), nebo ze zadaného přenosu soustavy využijeme programu MATLAB (Control System Toolbox), konkrétně příkazu  $[x,t]=\text{step}([4],[1 \ 1 \ 2])$ . Data upravíme a zkopírujeme do Excelu. Obě charakteristiky vykreslíme do jednoho obrázku.

Pomocí příkazu  $\text{step}([4],[1 \ 1 \ 2])$  lze vykreslit přechodovou charakteristiku v MATLABu do samostatného okna Figure.

Na obrázku vidíme v začátku charakteristik nepatrný rozdíl, ten je způsoben nedostatkem hodnot při vykreslení. Jinak jsou obě křivky podobné.

### 2.1.5 Výpočet impulsní funkce a vykreslení impulsní charakteristiky

*Analyticky vypočítejte impulsní funkci a na jejím základě vykreslete impulsní charakteristiku. Charakteristiku pak získejte také pomocí příkazů MATLABu (Control System Toolbox) a výsledky porovnejte.*

**Pomocí slovníku LT :**

Aplikujeme LT:

$$i(t) = L^{-1}\{G(s)\} \Rightarrow \text{Originál}$$

$$I(s) = G(s) \Rightarrow \text{Obraz}$$

(4)

$$I(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} = \frac{1,3229A}{(s + 0,5)^2 + 1,3229^2}$$

$$1,3229A = (s + 0,5)^2 + 1,3229^2$$

$$s \Rightarrow 1$$

$$1,3229A = 4$$

$$A = 3,0253$$

Úpravou a s využitím zpětné LT obdržíme impulsní funkci:

$$i(t) = Ae^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t$$

$$i(t) = 3,0253e^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t \quad (5)$$

**Derivací přechodové funkce:**

$$i(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (6)$$

$$i(t) = 0,3779e^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t - e^{-0,5t} \cdot \cos 1,3229t + e^{-0,5t} \cdot \cos 1,3229t + 2,6458e^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t$$

Opět po úpravě obdržíme impulsní funkci ve tvaru:

$$i(t) = 3,0253e^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t \quad (7)$$

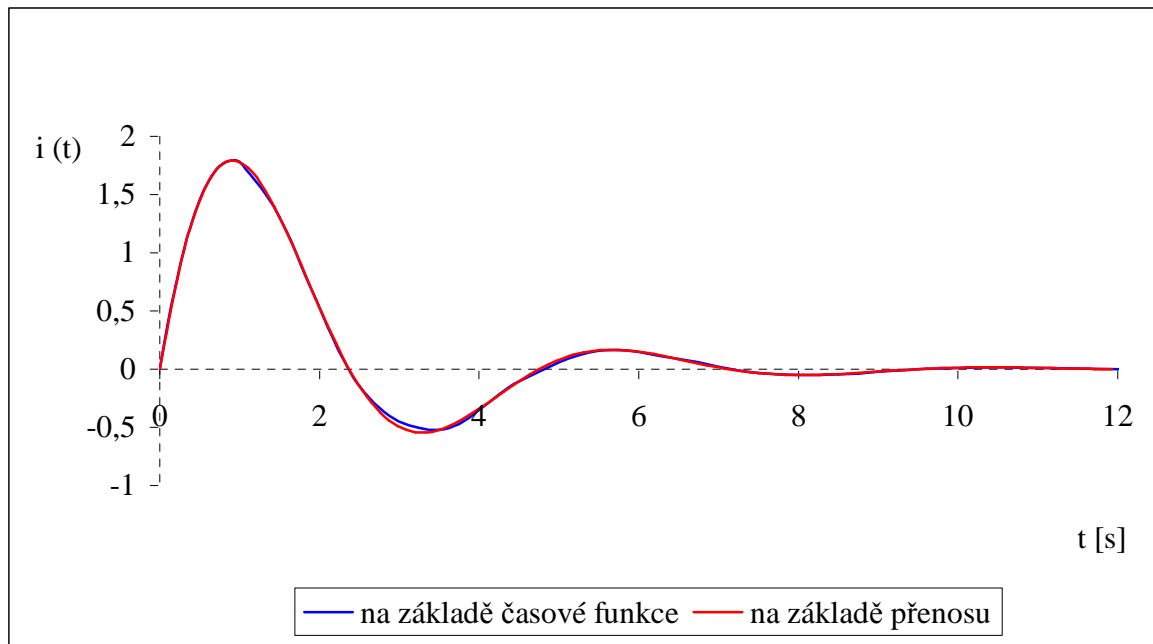
Počáteční a koncový bod určíme opět limitně:

$$i(0) = \lim_{t \rightarrow 0} i(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot I(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \cdot \frac{4}{s^2 + s + 2} \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{4}{s + 1 + \frac{2}{s}} \right] = 0$$

$$i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot I(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{4}{s^2 + s + 2} \right] = 0$$





Obr.2 Impulsová charakteristika pro periodickou soustavu

Data pro vykreslení impulsní charakteristiky získáme na základě časové funkce (7) výpočtem s využitím programu Excel. Pro srovnání použijeme i data získaná na základě zadaného přenosu soustavy z programu MATLAB, využijeme příkazu `[x,t]=impulse([4],[1 1 2])`.

Obě křivky vykreslíme do jednoho obrázku a vidíme že jsou podobné.

Přechodovou charakteristiku lze vykreslit do samostatného okna Figure pomocí příkazu `impulse([4],[1 1 2])`.

### 2.1.6 Výpočet frekvenčního přenosu LSDS a jeho upravení

*Určete frekvenční přenos daného dynamického systému a upravte jej na složkový a exponenciální tvar komplexního čísla.*

Na základě přenosu určíme frekvenční přenos tím, že za  $s \Rightarrow j\omega$ :

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2}$$

$$G(j\omega) = \frac{4}{-\omega^2 + j\omega + 2}$$

Takto získaný frekvenční přenos upravíme:

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{4}{-\omega^2 + j\omega + 2} = \frac{1}{-0,25\omega^2 + 0,25j\omega + 0,5} \cdot \frac{(0,5 - 0,25\omega^2) - 0,25j\omega}{(0,5 - 0,25\omega^2) - 0,25j\omega} = \\
 &= \frac{0,5 - 0,25\omega^2 - 0,25j\omega}{0,25 - 0,125\omega^2 - 0,125\omega^2 + 0,0625\omega^2 + 0,0625\omega^4} \\
 &= \frac{0,5 - 0,25\omega^2 - 0,25j\omega}{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}
 \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme frekvenční přenos vyjádřený pomocí komplexního čísla ve složkovém tvaru:

$$G(j\omega) = \frac{0,5 - 0,25\omega^2}{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4} + j \frac{-0,25\omega}{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4} \quad (8)$$

Poté vypočítáme amplitudovou frekvenční charakteristiku:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \sqrt{\frac{(0,5 - 0,25\omega^2)^2}{(0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4)^2} + \frac{0,25^2\omega^2}{(0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4)^2}} = \\
 &= \sqrt{\frac{0,5^2 - 0,25\omega^2 + 0,0625\omega^4 + 0,0625\omega^2}{(0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4)^2}} = \\
 &= \sqrt{\frac{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}{(0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4)^2}} = \sqrt{\frac{1}{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}} \\
 A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Následně určíme fázovou frekvenční charakteristiku

$$\varphi(j\omega) = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctg \frac{\frac{-0,25\omega}{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}}{\frac{0,5 - 0,25\omega^2}{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}} = \arctg \frac{-0,25\omega}{0,5 - 0,25\omega^2} \quad (10)$$

Nakonec po úpravě dostaneme frekvenční přenos vyjádřený pomocí komplexního čísla v exponenciálním tvaru:

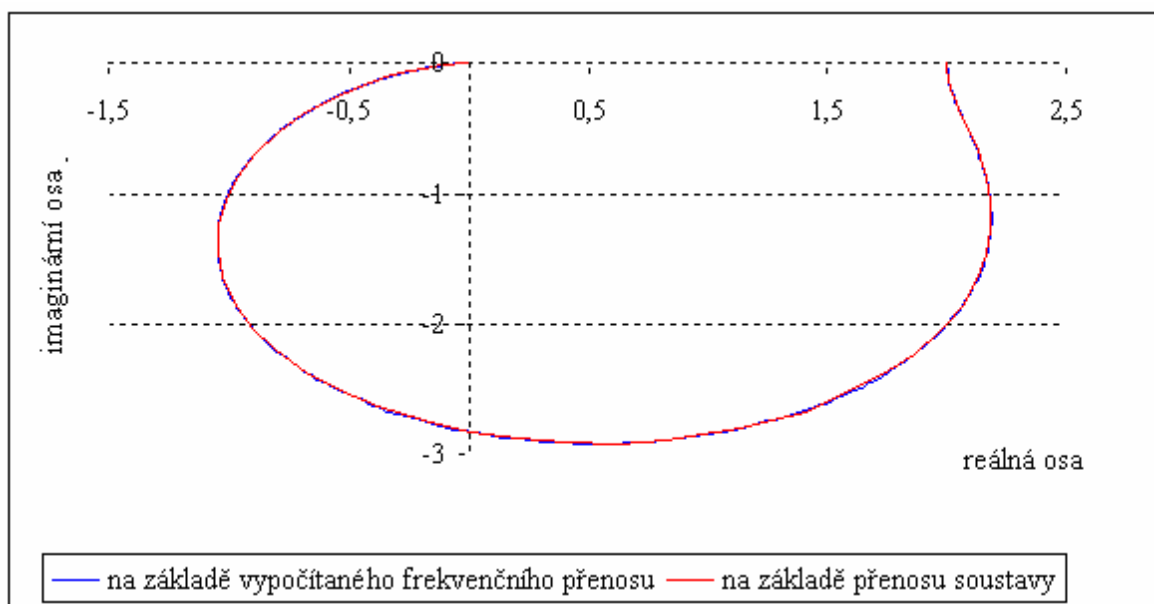
$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}} \cdot e^{\arctg \frac{-0,25\omega}{0,5 - 0,25\omega^2}}$$

### 2.1.7 Vykreslení Nyquistovy křivky

S využitím jednoho z výše uvedených tvarů komplexního čísla vykreslete amplitudově-fázovou frekvenční charakteristiku v komplexní rovině (Nyquistovu křivku). Stejnou charakteristiku vykreslete s využitím příkazu *MATLABu*, výsledky porovnejte.

Tab.1 Vybraná data na vykreslení Nyquistovy křivky pro periodickou soustavu.

$\omega$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	reálná	imaginární
2	-1	-1
4	-0,2642	-0,0755
6	-0,1141	-0,0201
8	-0,0635	-0,0082
10	-0,0404	-0,0041
12	-0,0279	-0,0024
14	-0,0205	-0,0015
16	-0,0157	0,0010



Obr.3 Nyquistova křivka pro periodickou soustavu

K získání dat pro vykreslení Nyquistovy křivky využijeme výpočtu frekvenčního přenosu vyjádřeného pomocí komplexního čísla (8) a pro srovnání i zadaného přenosu soustavy.

Na výpis dat do Workspace použijeme příkaz `[x,y,t]=nyquist(4],[1 1 2])`.

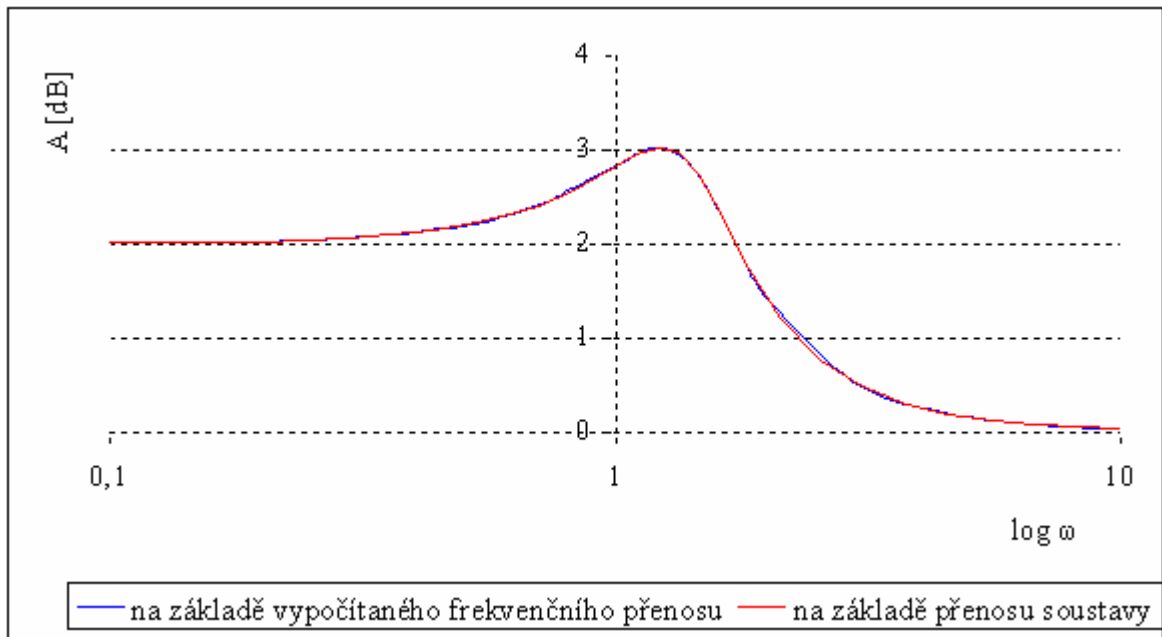
K vykreslení Nyquistovy křivky slouží v *MATLABU* příkaz `nyquist([4],[1 1 2])`

Křivky vykreslíme do jednoho obrázku, tak aby je bylo možné lépe srovnat

### 2.1.8 Vykreslení Bodeho křivky

Na základě analytického výpočtu vykreslete amplitudově frekvenční a poté i fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (Bodeho křivku). Stejně charakteristiky vykreslete také s využitím příkazu MATLABu a výsledky porovnejte.

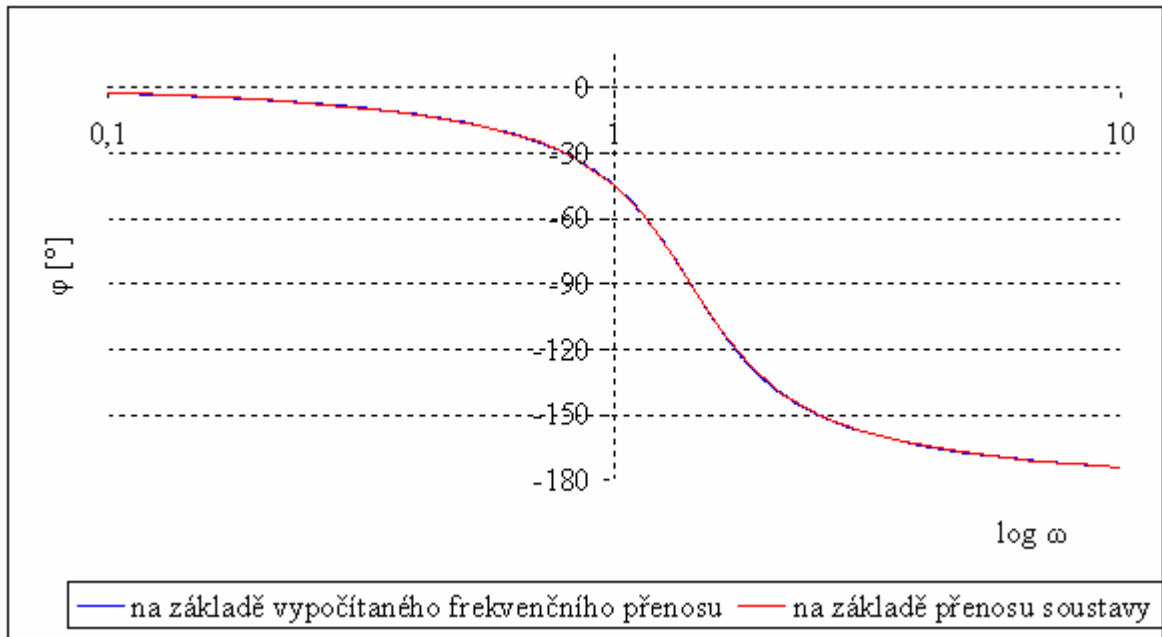
#### Amplitudová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích



Obr.4 Amplitudová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích pro periodickou soustavu

Na obrázku vidíme stejné průběhy obou charakteristik.

#### Fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích



Obr.5 Fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích pro periodickou soustavu

Na obr.4, obr.5 vidíme vykreslené charakteristiky na základě vypočítaného amplitudového a fázového frekvenčního přenosu (9), (10) a na základě přenosu soustavy.

V programu MATLAB vykreslíme obě frekvenční charakteristiky do jednoho obrázku pomocí příkazu `bode([4],[1 1 2])`.

Pokud chceme vypsát data do Workspace použijeme příkaz `[x,y,t]=bode([4],[1 1 2])`.

### 2.1.9 Závěr protokolu č.1 – vnější popis a analýza LSDS periodického systému

Zadaný systém máme:  $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 4u(t)$

Po úpravě jsme obdrželi přenosovou funkci ve tvaru:  $G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2}$

Následně jsme určili nuly, póly, řád a relativní řád systému:

Tento dynamický systém má dvě nuly v nekonečnu.

Póly jsme určili vyřešením rovnice  $s^2 + s + 2 = 0$ :

$$p_1 = -0,5 + j1,3229$$

$$p_2 = -0,5 - j1,3229$$

Řád i relativní řád systému je: druhý

Rozhodli jsem o stabilitě, periodicitě (kmitavosti) a fázovosti systému:

Systém je druhého řádu, všechny koeficienty jsou kladné. Můžeme tedy říct, že systém je stabilní.

Kořeny jsou komplexně sdružené, proto je systém periodický.

Systém je minimálně fázový, protože žádná nula (kořen čitatele) neleží v pravé komplexní polorovině.

Analyticky jsme vypočítali přechodovou funkci (pomocí slovníku LT s využitím metody neurčitých koeficientů) a na základě časové funkce jsme si v programu Excel vykreslili přechodovou charakteristiku:

$$h(t) = 2 - 0,7559e^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t - 2e^{-0,5t} \cdot \cos 1,3229t$$

Pro ověření jsme vykreslili charakteristiku na základě přenosu soustavy v MATLABu (Control System Toolbox) pomocí příkazu `step([4],[1 1 2])`.

Data z programu MATLAB jsme získali příkazem `[x,t]=step([4],[1 1 2])`, upravili je a zkopírovali do programu Excel. Vykreslili jsme obě křivky do jednoho obrázku.

Na obr.1 je vidět shodnost obou charakteristik.

Poté jsme analyticky vypočítali impulsní funkci (ze slovníku LT a následně pro ověření derivací přechodové funkce) a opět na základě časové funkce v programu Excel vykreslili impulsní charakteristiku:

$$i(t) = 3,0253e^{-0,5t} \cdot \sin 1,3229t$$

Pro ověření jsme vykreslili i charakteristiku na základě přenosu soustavy v MATLABu pomocí příkazu `impulse([4],[1 1 2])`.

Data z programu MATLAB jsme získali příkazem `[x,t]=impulse([4],[1 1 2])`

Charakteristiky jsou totožné, což je vidět na obr.2.

Určili jsme frekvenční přenos daného dynamického systému a upravili jej na složkový a exponenciální tvar komplexního čísla:

Frekvenční přenos:

$$G(j\omega) = \frac{4}{-\omega^2 + j\omega + 2}$$

Frekvenční přenos ve složkovém tvaru:

$$G(j\omega) = \frac{0,5 - 0,25\omega^2}{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4} + j \frac{-0,25\omega}{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}$$

Frekvenční přenos v exponenciálním tvaru:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{0,25 - 0,1875\omega^2 + 0,0625\omega^4}} \cdot e^{\operatorname{arctg} \frac{-0,25\omega}{0,5 - 0,25\omega^2}}$$

Vykreslili jsme amplitudově-fázovou frekvenční charakteristiku v komplexní rovině (Nyquistovu křivku). A to na základě vypočítaného frekvenčního přenosu vyjádřeného pomocí komplexního čísla v programu Excel a na základě přenosu soustavy v programu MATLABu pomocí příkazu `nyquist([4],[1 1 2])`.

Data z programu MATLAB jsme získali příkazem `[x,y,t]=nyquist([4],[1 1 2])`

Pro srovnání jsou obě charakteristiky vidět na obr.3.

Vykreslili jsme na základě vypočítaného amplitudového a fázového frekvenčního přenosu a poté i s využitím přenosu soustavy nejprve amplitudovou frekvenční charakteristiku a následně fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (Bodeho křivku).

Pro vykreslení Bodeho křivky jsme využili příkazu `nyquist([4],[1 1 2])`.

Data z programu MATLAB jsme získali příkazem `[x,y,t]=bode([4],[1 1 2])`

Vykreslené křivky vidíme na obr.4, obr.5.

## 2.2 Protokol č.1 - vnější popis a analýza LSDS aperiodického systému

Jednorozměrný lineární spojité dynamický systém je dán diferenciální rovnicí:

$$a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \quad (11)$$

Dosaďte hodnoty podle individuálního zadání a k tomuto systému vypracujte následující úkoly:

### 2.2.1 Vyjádření přenosové funkce LSDS

*Napište přenosovou funkci zadaného systému, uvažujte přitom nulové počáteční podmínky:*

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$$

Uvažujeme nulové počáteční podmínky:

$$y'(0) = z(0) = 0$$

$$u(0) = 0$$

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 5sY(s) - y(0) + 4Y(s) = U(s)$$

$$s^2 Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = U(s)$$

$$Y(s) \cdot (s^2 + 5s + 4) = U(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \cdot U(s)$$

Po úpravě obdržíme přenosovou funkci ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

### 2.2.2 Stanovení nul, pólů, řádu a relativního řádu LSDS

*Určete nuly, póly, řád a relativní řád systému:*

Nuly:

Tento dynamický systém má dvě nuly v nekonečnu.

Póly:

Vyřešíme rovnici  $s^2 + 5s + 4 = 0$  a tím dostaneme příslušné póly:

$$D = 3$$

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -4$$

Řád:

Řád systému je druhý, což vidíme ze stupně polynomu jmenovatele.

Relativní řád je také druhý, rovná se stupeň jmenovatel minus stupeň čitatele.

### 2.2.3 Rozhodnutí o stabilitě, kmitavosti a fázovosti LSDS

*Rozhodněte o stabilitě, periodicitě (kmitavosti) a fázovosti:*

Systém je druhého řádu, všechny koeficienty jsou kladné – nutná podmínka stability.

Nutná podmínka stability je zároveň postačující podmínkou stability. Můžeme říct, že systém je stabilní.

Kořeny nejsou komplexně sdružené, proto je systém aperiodický.

Systém je minimálně fázový, protože žádná nula (kořen čitatele) neleží v pravé komplexní polorovině.



### 2.2.4 Výpočet přechodové funkce a vykreslení přechodové charakteristiky

*Analyticky vypočítejte přechodovou funkci a na jejím základě vykreslete přechodovou charakteristiku. Charakteristiku pak získajte také pomocí příkazů MATLABu (Control System Toolbox) a výsledky porovnejte.*

**Pomocí slovníku LT s užitím metody neurčitých koeficientů:**

Máme soustavu ve tvaru:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \cdot U(s)$$

Reakce soustavy na jednotkový skok:  $U(s) = \frac{1}{s}$

Aplikujeme LT:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Rightarrow \text{Originál}$$

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} \Rightarrow \text{Obraz}$$

(12)

Rozložíme na parciální zlomky a vypočítáme příslušné koeficienty:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}$$

$$A(s+1) \cdot (s+4) + Bs \cdot (s+4) + Cs \cdot (s+1) = 1$$

$$s = 0 \Rightarrow 4A + 0 + 0 = 1$$

$$A = 0,25$$

$$s = -1 \Rightarrow 0 - 3B + 0 = 1$$

$$B = -0,33$$

$$s = -4 \Rightarrow 0 + 0 + 12C = 1$$

$$C = 0,08$$

Po výpočtu a aplikaci zpětné LT obdržíme přechodovou funkci ve tvaru:

$$h(t) = A + Be^{-t} + Ce^{-4t}$$

$$h(t) = 0,25 - 0,33e^{-t} + 0,08e^{-4t}$$

Počáteční a koncový bod určíme limitně:

$$h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot H(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \cdot \frac{G(s)}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = 0$$

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot H(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{G(s)}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

**Za pomoci reziduí:**

$$H(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 5s + 4)} = \frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+4)}$$

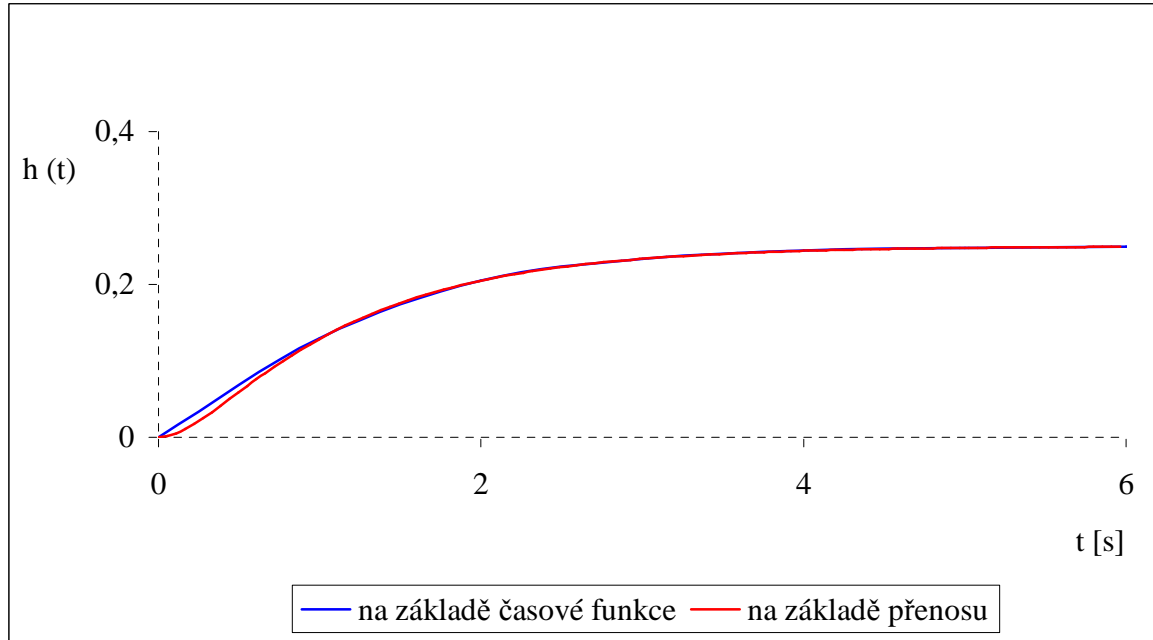
$$h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s}{s \cdot (s+1) \cdot (s+4)} \cdot e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -1} \left[ \frac{s+1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+4)} \cdot e^{st} \right] +$$

$$\lim_{s \rightarrow -4} \left[ \frac{s+4}{s \cdot (s+1) \cdot (s+4)} \cdot e^{st} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(s+1) \cdot (s+4)} \cdot e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow -1} \left[ \frac{1}{s \cdot (s+4)} \cdot e^{st} \right] +$$

$$\lim_{s \rightarrow -4} \left[ \frac{1}{s \cdot (s+1)} \cdot e^{st} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot e^{-t} + \frac{1}{12} \cdot e^{-4t}$$

Přechodovou funkci obdržíme ve tvaru:

$$h(t) = 0,25 - 0,33e^{-t} + 0,08e^{-4t} \quad (13)$$



*Obr.6 Přechodová charakteristika pro aperiodickou soustavu*

Data pro přechodovou charakteristiku jsme získali na základě vypočítané časové funkce (13) v programu Excel. Pro srovnání použijeme i data získaná na základě zadaného přenosu soustavy z programu MATLAB, využijeme příkazu  $[x,t]=\text{step}([1],[1 \ 5 \ 4])$ .

### 2.2.5 Výpočet impulsní funkce a vykreslení impulsní charakteristiky

*Analyticky vypočítejte impulsní funkci a na jejím základě vykreslete impulsní charakteristiku. Charakteristiku pak získáte také pomocí příkazů MATLABu (Control System Toolbox) a výsledky porovnejte.*

**Pomocí slovníku LT dostáváme:**

Aplikujeme LT:

$$i(t) = L^{-1}\{G(s)\} \Rightarrow \text{Originál}$$

$$I(s) = G(s) \Rightarrow \text{Obraz}$$

(14)

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4}$$

$$A(s+4) + B(s+1) = 1$$

$$s = -1 \Rightarrow A = 0,33$$

$$s = -4 \Rightarrow B = -0,33$$

Úprav a s využitím zpětné LT obdržíme výslednou impulsní funkci ve tvaru:

$$i(t) = Ae^{-t} + Be^{-4t}$$

$$i(t) = 0,33e^{-t} - 0,33e^{-4t}$$

**Derivací přechodové funkce:**

$$i(t) = \frac{dh(t)}{dt} \tag{15}$$

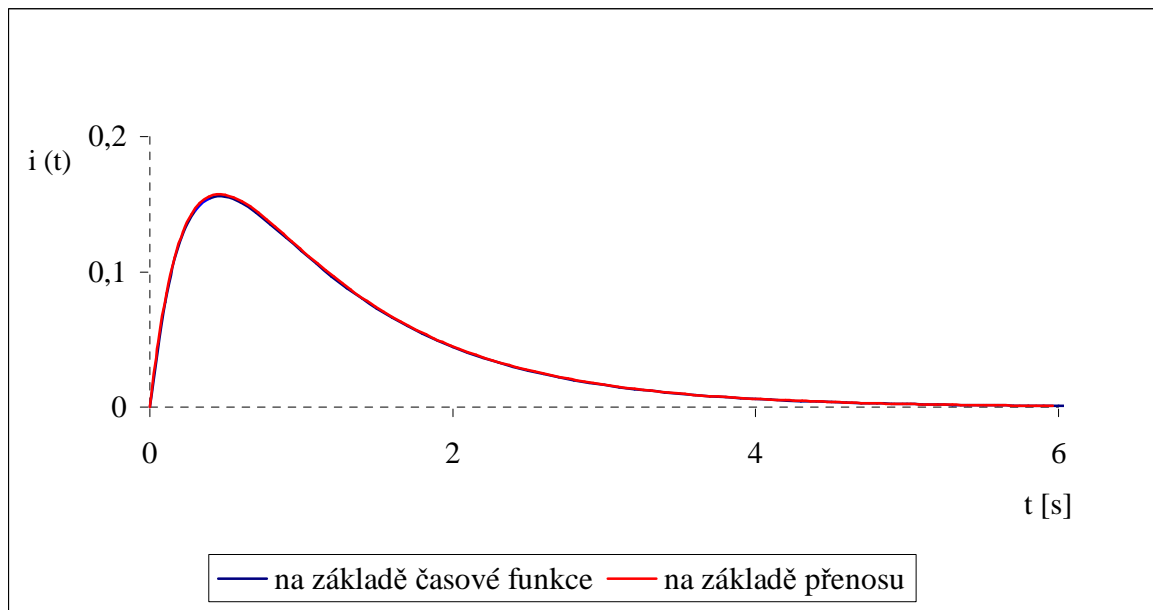
$$i(t) = 0,33e^{-t} - 0,33e^{-4t} \tag{16}$$

Limitně určíme počáteční a koncový bod:

$$i(0) = \lim_{t \rightarrow 0} i(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot I(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ s \cdot \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \right]$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{s + 5 + \frac{4}{s}} \right] = 0$$

$$i(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot I(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \right] = 0$$



Obr.7 Impulsová charakteristika pro aperiodickou soustavu

Opět jsme hodnoty potřebné pro vykreslení impulsní charakteristiky získali na základě vypočítané časové funkce (16) v programu Excel.

Pro srovnání použijeme hodnoty získané na základě zadaného přenosu soustavy z programu MATLAB, využijeme příkazu  $[x,t]=\text{impulse}([1],[1 \ 5 \ 4])$ .

### 2.2.6 Určení frekvenčního přenosu LSDS a jeho úprava

*Určete frekvenční přenos daného dynamického systému a upravte jej na složkový a exponenciální tvar komplexního čísla.*

Za pomoci přenosu soustavy určíme frekvenční přenos tím, že za  $s \Rightarrow j\omega$ :

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 5j\omega + 4}$$

Získaný frekvenční přenos upravíme:

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 5j\omega + 4} = \frac{1}{-\omega^2 + 5j\omega + 4} \cdot \frac{(4 - \omega^2) - 5j\omega}{(4 - \omega^2) - 5j\omega} = \frac{4 - \omega^2 - 5j\omega}{16 - 4\omega^2 - 4\omega^2 + 25\omega^2 + \omega^4}$$

$$= \frac{4 - \omega^2 - 5j\omega}{16 + 17\omega^2 + \omega^4}$$

Dostaneme frekvenční přenos vyjádřený pomocí komplexního čísla ve složkovém tvaru:

$$G(j\omega) = \frac{4 - \omega^2}{16 + 17\omega^2 + \omega^4} + j \frac{-5\omega}{16 + 17\omega^2 + \omega^4} \quad (17)$$

V dalším kroku vypočítáme amplitudově frekvenční charakteristiku:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(4 - \omega^2)^2}{(16 + 17\omega^2 + \omega^4)^2} + \frac{5^2\omega^2}{(16 + 17\omega^2 + \omega^4)^2}} = \sqrt{\frac{16 - 8\omega^2 + \omega^4 + 25\omega^2}{(16 + 17\omega^2 + \omega^4)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{16 + 17\omega^2 + \omega^4}{(16 + 17\omega^2 + \omega^4)^2}} = \sqrt{\frac{1}{16 + 17\omega^2 + \omega^4}}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{16 + 17\omega^2 + \omega^4}} \quad (18)$$

Dále vypočteme fázově frekvenční charakteristiku:

$$\varphi(j\omega) = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctg \frac{\frac{-5\omega}{16 + 17\omega^2 + \omega^4}}{\frac{4 - \omega^2}{16 + 17\omega^2 + \omega^4}} = \arctg \frac{-5\omega}{4 - \omega^2} \quad (19)$$

Nakonec stanovíme frekvenční přenos v exponenciálním tvaru:

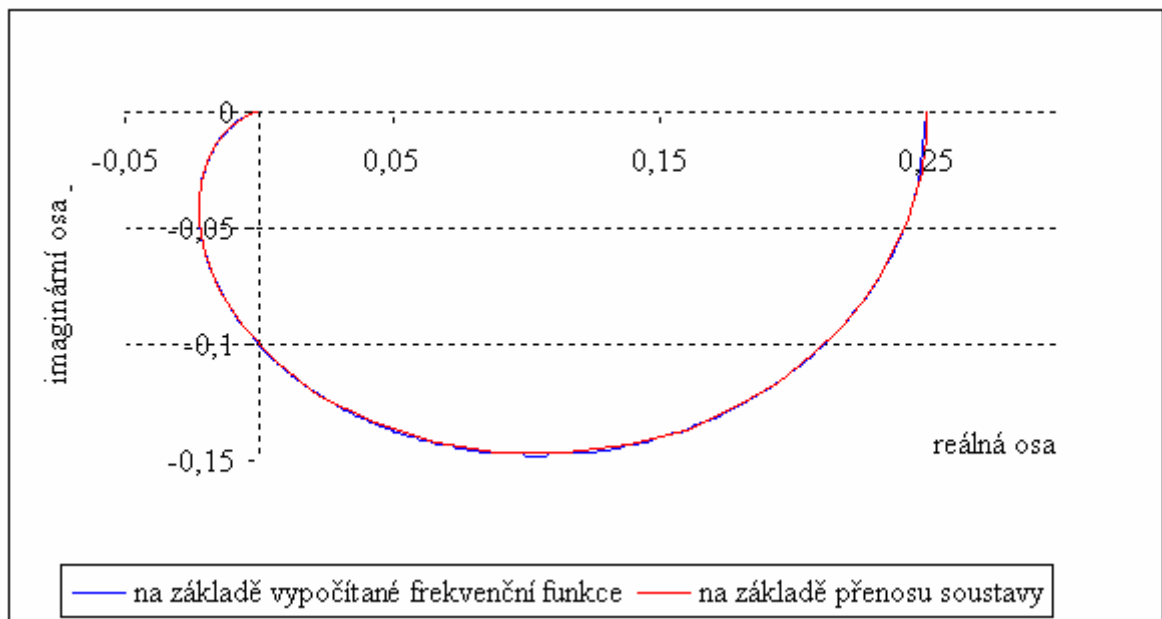
$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{16 + 17\omega^2 + \omega^4}} \cdot e^{\arctg \frac{-5\omega}{4 - \omega^2}}$$

### 2.2.7 Vykreslení Nyquistovy křivky

*S využitím jednoho z výše uvedených tvarů komplexního čísla vykreslete amplitudově-fázovou frekvenční charakteristiku v komplexní rovině (Nyquistovu křivku). Stejnou charakteristiku vykreslete s využitím příkazu MATLABu, výsledky porovnejte.*

Tab.2 Vybrané hodnoty k vykreslení Nyquistovy křivky pro aperiodickou soustavu.

$\omega$ [rad.s <sup>-1</sup> ]	reálná	imaginární
2	0	0
4	-0,0221	-0,0368
6	-0,0166	-0,0156
8	-0,0115	-0,0078
10	-0,0082	-0,0043
12	-0,0061	-0,0026
14	-0,0046	-0,0017
16	-0,0036	-0,0011



Obr.8 Nyquistova křivka pro aperiodickou soustavu

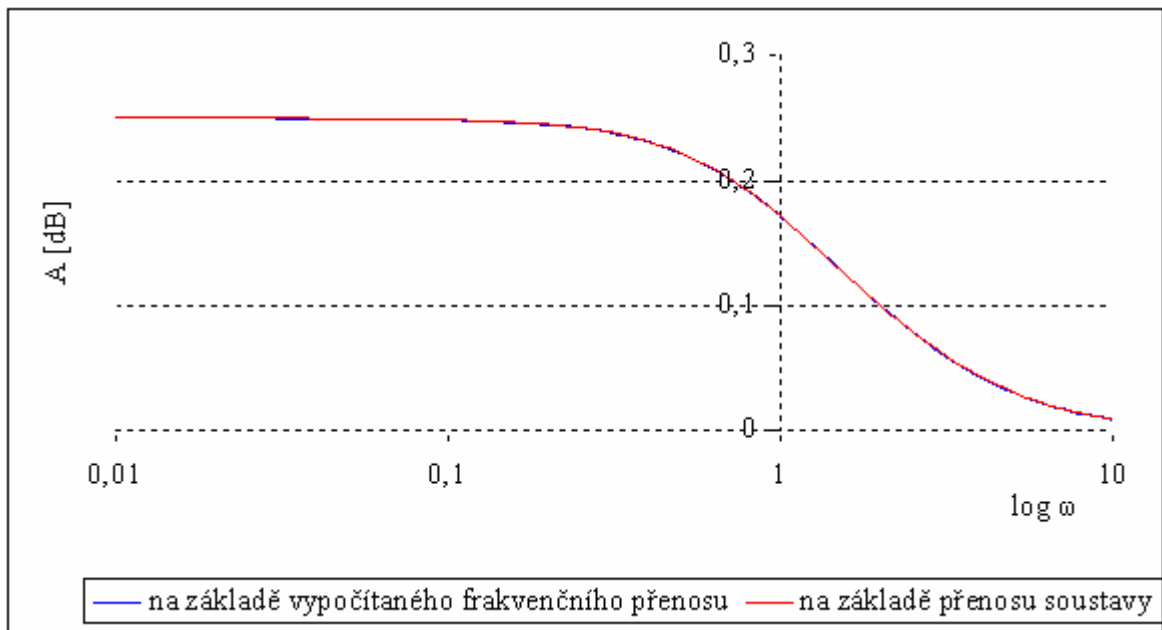
Na obrázku vidíme Nyquistovu křivku, která je vykreslená na základě vypočítaného frekvenčního přenosu vyjádřený pomocí komplexního čísla (17) v programu Excel a pro srovnání i za pomoci přenosu zadané soustavy v programu MATLAB (Control System Toolbox).

Všimněme si, že obě charakteristiky jsou stejné.

### 2.2.8 Vykreslení Bodeho křivky

*Na základě analytického výpočtu vykreslete frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (Bodeho křivku). Stejnou charakteristiku vykreslete také s využitím příkazu MATLABu a výsledky porovnejte.*

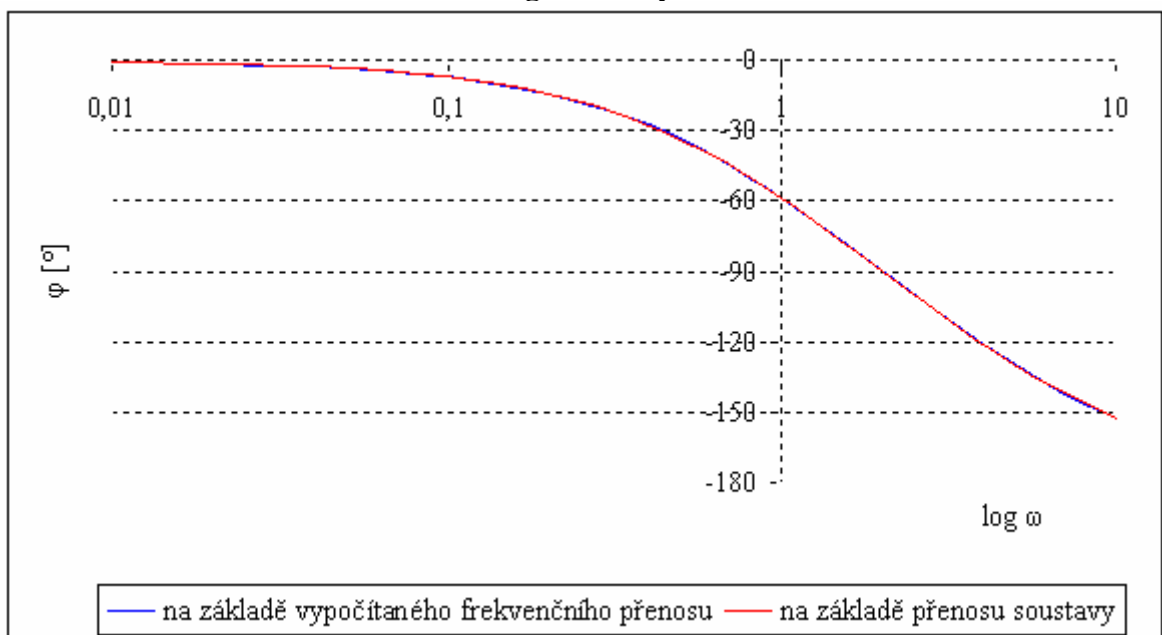
## Amplitudová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích



Obr.9 Amplitudová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích pro aperiodickou soustavu

Můžeme říct, že průběhy jsou podobné.

#### Fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích



Obr.10 Fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích pro aperiodickou soustavu

Na obr.9, obr.10 vidíme vykreslené charakteristiky na základě vypočítaných frekvenčních funkcí (18), (19) a na základě přenosu zadané soustavy.

### 2.2.9 Závěr protokolu č.1 – vnější popis a analýza LSDS pro aperiodickou soustavu

Zadaný systém:  $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$

Přenosovou funkci obdržíme ve tvaru :  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$

Určili jsem nuly, póly, řád a relativní řád systému:

Tento dynamický systém má dvě nuly v nekonečnu.

Póly jsme určili vyřešením rovnice  $s^2 + 5s + 4 = 0$

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -4$$

Relativní řád i řád systému je: druhý

Rozhodli jsme o stabilitě, periodicitě (kmitavosti) a fázovosti systému:

Systém je druhého řádu, všechny koeficienty jsou kladné. Systém je tedy stabilní.

Kořeny jsou reálné, proto je systém aperiodický.

Systém je minimálně fázový, protože žádná nula (kořen čitatele) neleží v pravé komplexní polorovině.

Vypočítali jsme analyticky přechodovou funkci (pomocí slovníku LT s využitím metody neurčitých koeficientů a poté pro ověření za pomoci reziduí ) a na jejím základě vykreslili přechodovou charakteristiku :

$$h(t) = 0,25 - 0,33e^{-t} + 0,08e^{-4t}$$

Pro ověření jsme vykreslili charakteristiku na základě přenosu soustavy v MATLABu (Control System Toolbox), potřebná data jsme získali pomocí příkazu `[x,t]=step([1],[1 5 4])`.

Obě charakteristiky jsme vykreslili do jednoho grafu v využití programu Excel.

A na obr.6 je vidět totožnost obou charakteristik.

Poté jsme analyticky vypočítali impulsní funkci (ze slovníku LT a následně pro ověření derivací přechodové funkce) a na jejím základě vykreslili impulsní charakteristiku:

$$i(t) = 0,33e^{-t} - 0,33e^{-4t}$$

Pro ověření jsme vykreslili charakteristiku na základě přenosu soustavy, hodnoty jsme získali v MATLABu příkazem `[x,t]=impulse([1],[1 5 4])` a křivky vykreslili do jednoho obrázku.

Můžeme říct, že obě charakteristiky jsou stejné, což je vidět na obr.7.



Určili jsme frekvenční přenos daného dynamického systému a upravili jej na složkový a exponenciální tvar komplexního čísla:

Frekvenční přenos:

$$G(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 5j\omega + 4}$$

Frekvenční přenos ve složkovém tvaru:

$$G(j\omega) = \frac{4 - \omega^2}{16 + 17\omega^2 + \omega^4} + j \frac{-5\omega}{16 + 17\omega^2 + \omega^4}$$

Frekvenční přenos v exponenciálním tvaru:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{16 + 17\omega^2 + \omega^4}} \cdot e^{\operatorname{arctg} \frac{-5\omega}{4 - \omega^2}}$$

Využili jsme výše uvedených tvarů komplexního čísla a vykreslili amplitudově-fázovou frekvenční charakteristiku v komplexní rovině (Nyquistovu křivku).

A to na základě vypočítaného frekvenčního vyjádření pomocí komplexního čísla, využili jsme programu Excel a na základě přenosu soustavy v programu MATLAB. Data na vykreslení křivky jsme získali pomocí příkazu `[x,y,t]=nyquist ([1],[1 5 4])`.

Pro srovnání obě charakteristiky vidíme na obr.8.

Vykreslili jsme na základě analytického výpočtu a poté i s využitím přenosu soustavy nejprve amplitudovou frekvenční charakteristiku a následně fázovou frekvenční charakteristiku v logaritmických souřadnicích (Bodeho křivku).

Pro vykreslení Bodeho křivky jsme využili příkazu `bode([4],[1 1 2])`.

Data z programu MATLAB jsme získali příkazem `[x,y,t]=bode([4],[1 1 2])`

Křivky vidíme na obr.9, obr.10.

### 2.3 Protokol č.2 – syntéza RO a vnitřní popis pro periodickou soustavu

Jednorozměrný lineární spojitý dynamický systém je dán diferenciální rovnicí :

$$a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \quad (20)$$

Dosaďte hodnoty podle individuálního zadání (viz protokol č.2.1) a k tomuto systému vypracujte následující úkoly:

### 2.3.1 Návrh spojitého regulátoru pomocí kritéria stability

*Pomocí kritéria stability navrhnete spojitý regulátor a simulačně ověřte jeho funkčnost.*

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} = \frac{b}{a}$$

$$G_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s} = \frac{q}{p} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \Rightarrow r_0 = q_1; r_{-1} = q_0$$

Charakteristický polynom uzavřeného regulačního obvodu je ve tvaru  $\Rightarrow ap+bq$

$$(s^2 + s + 2)s + 4(q_1 s + q_0)$$

$$s^3 + s^2 + (2 + 4q_1)s + 4q_0$$

Pomocí Routh-Schurova kritéria stability určíme stabilitu systému

1	1	$(2 + 4q_1)$	$4q_0$
1		$4q_0$	$\cdot (-1)$
0	1	$2 + 4q_1 - 4q_0$	$4q_0$

$$4q_0 > 0$$

$$q_0 = 4 = r_{-1}$$

$$2 + 4q_1 - 4q_0 > 0$$

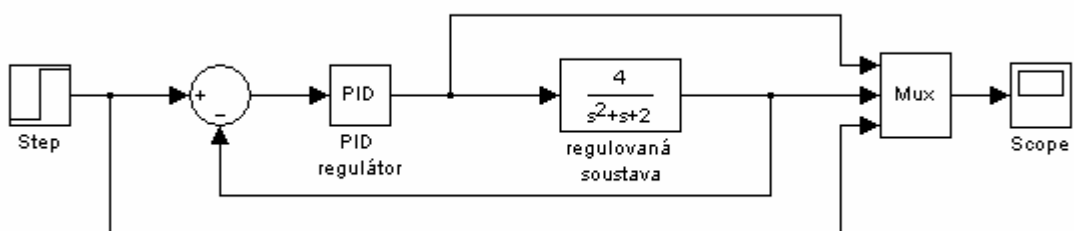
$$q_1 > \frac{4q_0 - 2}{4} = \frac{16 - 2}{4} = 4 - 0,5 = 3,5$$

$$q_1 > 3,5$$

$$q_1 = 5 = r_0$$

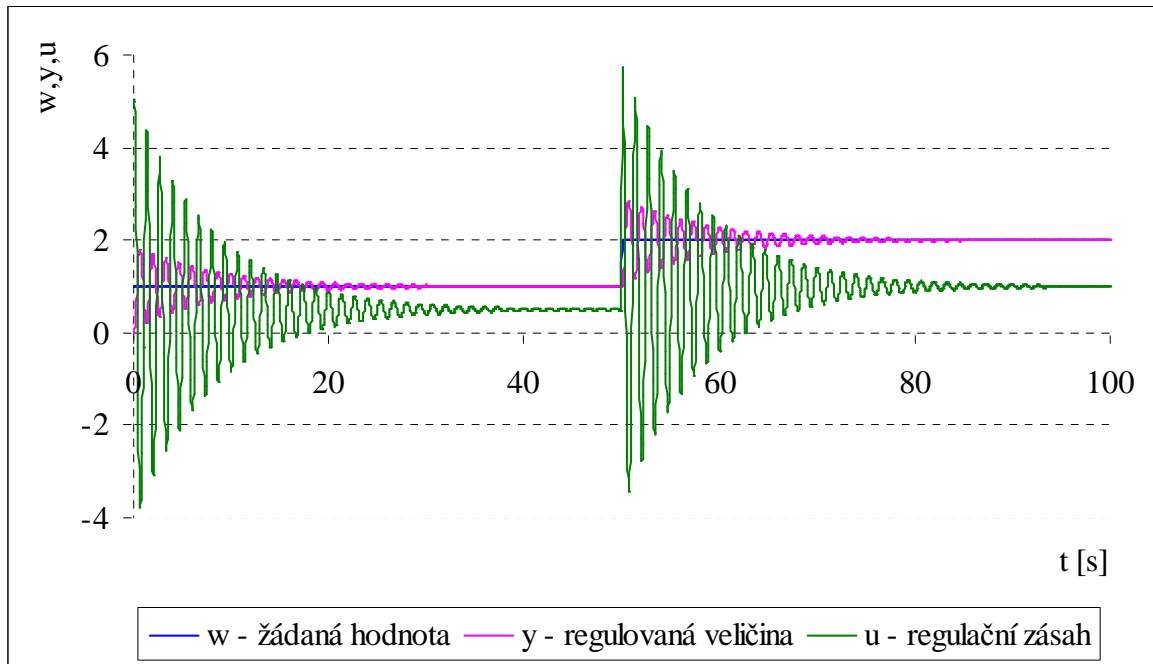
Navržený PI regulátor pomocí kritéria stability máme ve tvaru:

$$G_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} = 5 + \frac{4}{s}$$



Obr.11 Simulační schéma základního RO

Uvedené simulační schéma vytvořené v programu MATLAB jsme použili pro tři níže uvedené simulace regulačního pochodu. Tedy pro obr. 12, 13, 15.



Obr.12 Simulace regulačního pochodu pomocí regulátoru navrženého metodou kritériem stability pro periodický systém

Pomocí této metody lze zvolit více kombinací hodnot PI regulátoru.

Na obrázku si všimněme regulované veličiny, které trvá delší dobu než se ustálí na žádané hodnotě.

Průběh regulačního zásahu je hodně kmitavý.

### 2.3.2 Spojitý regulátor navržený dvěma klasickými metodami

*Libovolnými dvěma „klasickými metodami“ navrhnete spojitý regulátor, který zajistí stabilní regulační pochod a sledování žádané veličiny. Řízení systému simulujte.*

#### a) Whiteleyovy standardní tvary

$$\text{Zadaná soustava: } G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} = \frac{b}{a}$$

Pro náš případ budeme navrhovat PID regulátor.

$$\text{Regulátor v obecném tvaru: } G_R(s) = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s} = \frac{q}{p}$$

$$\text{Přenos řízení: } G_{w/y}(s) = \frac{4q_2 s^2 + 4q_1 s + 4q_0}{s^3 + s^2 + 2s + 4q_2 s^2 + 4q_1 s + 4q_0}$$

Tab.3 Hodnoty pro výpočet parametrů regulátoru za n=3, Whiteleyovy standardní tvary

Stupeň n	Koeficienty							charakteristické hodnoty regulovaného pochodu		
	$\bar{a}_6$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_0$	$\tau^{tab} [s]$	$t_r^{tab} [s]$	$\Delta y_{max} [%]$
3				1	6,7	6,7	1	3,5		10
4			1	7,9	15	7,9	1	5,4		15
5		1	18	69	69	18	1	6,5		20
6	1	36	251	485	251	36	1	8		20

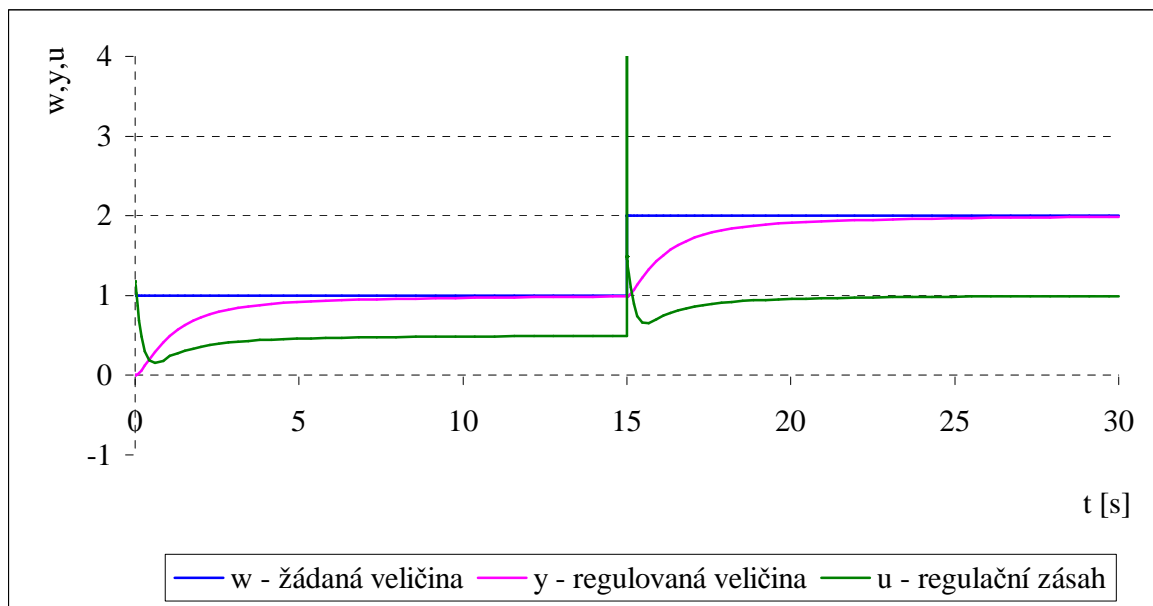
Použijeme uvedenou Tab.3., pro n=3, tedy 1 6,7 6,7 1

$$s^0: 4q_0 = 1 \Rightarrow q_0 = 0,25$$

$$s^1: 2 + 4q_1 = 6,7 \Rightarrow q_1 = 1,175$$

$$s^2: 1 + 4q_2 = 6,7 \Rightarrow q_2 = 1,425$$

$$\text{Dostáváme PID regulátor ve tvaru: } G_R(s) = r_0 + \frac{r_1}{s} + r_2 s = 1,175 + \frac{0,25}{s} + 1,425s$$



Obr.13 Simulace regulačního pochodu regulátorem navrženým Whiteleyho metodou pro periodickou soustavu

Na obrázku vidíme, že regulátor navržený Whiteleyho metodou má „lepší“ regulační pochod v porovnání s předchozí metodou.

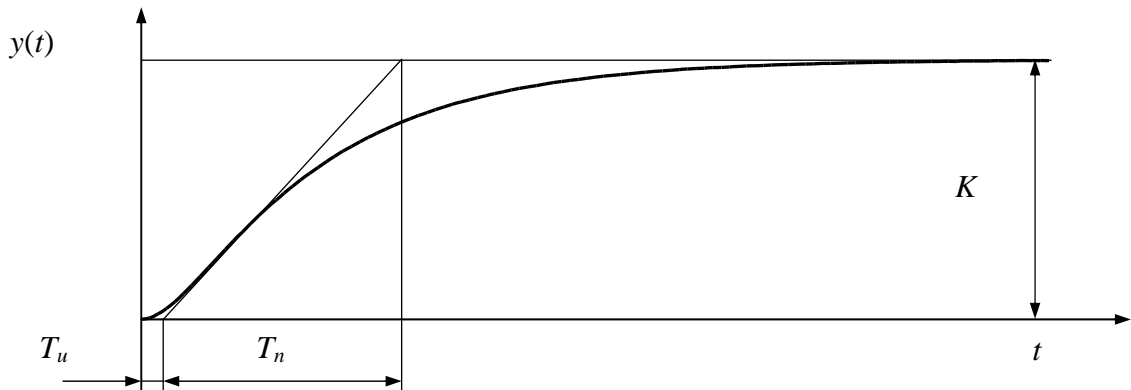
Regulovaná veličina se ustálí poměrně rychle na žádané hodnotě, naproti tomu regulátor na začátku skokové změny žádané hodnoty hodně kmitne.

#### b) Nastavení z přechodové charakteristiky (modifikovaná Ziegler–Nicholsova metoda)

Tato metoda je formálně určena pro aperiodické soustavy, jak ale bylo ověřeno, lze ji použít i pro soustavy periodické.

Využijeme následujícího postupu:

- naměříme přechodovou charakteristiku regulované soustavy.
- Odečíst dobu průtahu  $T_u$ , dobu náběhu  $T_n$  a finální hodnotu  $K$  podle obr.13
- Vypočítáme  $\gamma$ , platí  $\gamma = T_u / T_n$ .
- Ze získaných parametrů vypočítat z Tab.4 parametry regulátoru.

Obr.14 Určení parametrů  $K$ ,  $T_u$  a  $T_n$  z přechodové charakteristika regulované soustavy

Tab.4 Parametry regulátoru pro modifikovanou Ziegler-Nicholsovu metodu

	$k_r$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	$\gamma \frac{1}{K}$	-	-
<b>PI</b>	$0,9\gamma \frac{1}{K}$	$3,5 T_u$	-
<b>PD</b>	$1,2\gamma \frac{1}{K}$	-	$0,25T_u$
<b>PID</b>	$1,25\gamma \frac{1}{K}$	$2 T_u$	$0,5 T_u$

$$T_u = 0,2968$$

$$T_n = 1,1179$$

$$K = 2$$

$$\gamma = \frac{T_n}{T_u} = \frac{1,1179}{0,2968} = 3,7665$$

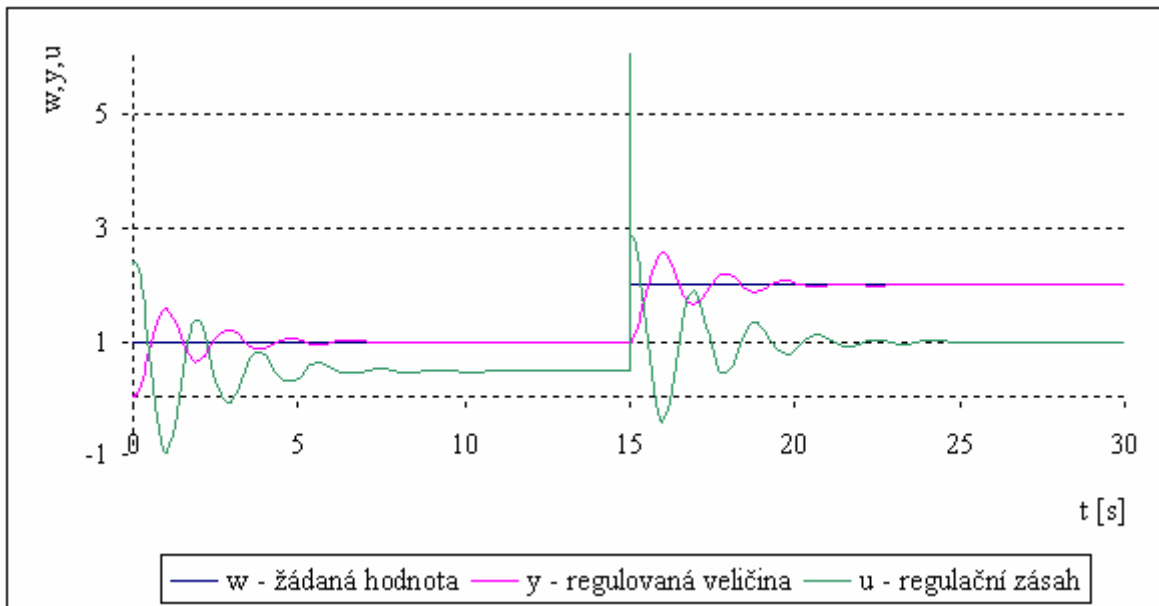
Návrh PID regulátoru z Tab.4:

$$k_p = 1,25 \cdot \gamma \frac{1}{K} = 1,25 \cdot 3,7665 \cdot \frac{1}{2} = 2,3541 \Rightarrow r_0 = 2,3541$$

$$T_I = 2 \cdot T_u = 2 \cdot 0,2968 = 0,5936 \Rightarrow r_{-1} = \frac{r_0}{T_I} = 3,9658$$

$$T_D = 0,5 \cdot T_u = 0,5 \cdot 0,2968 = 0,1484 \Rightarrow r_1 = r_0 \cdot T_D = 0,3494$$

Regulátor PID máme ve tvaru:  $G_R(s) = 2,3541 + \frac{3,9658}{s} + 0,3494s$



Obr.15 Simulace regulace s využitím modifikované Ziegler–Nicholsovi metody pro periodický systém

Regulovaná veličina se poměrně „rychle“ ustálí na žádané hodnotě. Můžeme říct, že regulační pochod jako celek je o něco „horší“, než u předchozí metody. Opět si všimněme nežádoucího nadkmitu u regulačního zásahu při skokové změně žádané hodnoty .

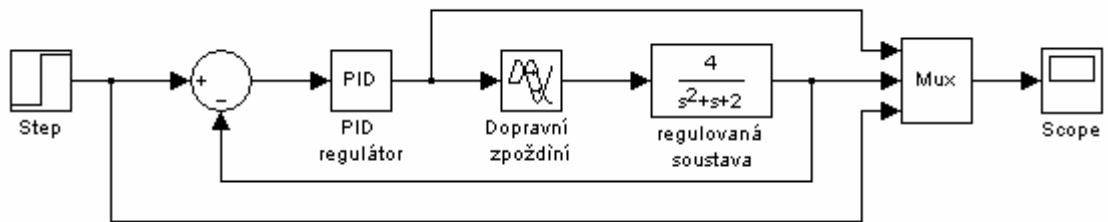
### 2.3.3 Aplikace dopravního zpoždění na daný systém a jeho řízení

*K danému systému přidejte dopravní zpoždění  $\Theta \in \langle 1;10 \rangle$  a řiďte jej pomocí regulátoru navrženého v jedné z metod z předchozího bodu a to nejprve v základním regulačním obvodu a poté pomocí Smithova prediktoru.*

Pro simulaci budeme brát hodnoty z výpočtu *Whiteleyho* metody, protože regulační pochod je „lepší“, než u modifikované Ziegler–Nicholsovi metody.

Regulátor PID máme ve tvaru:  $G_R(s) = 1,175 + \frac{0,25}{s} + 1,425s$

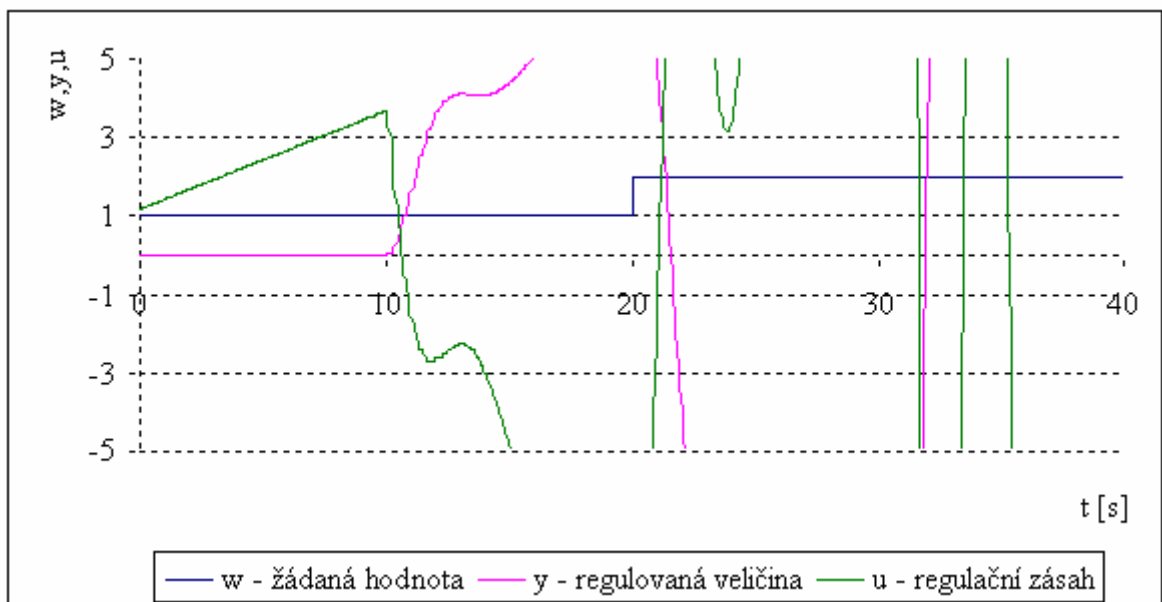
a) bez Smithova prediktoru



Obr.16 Simulační schéma základního RO s dopravním zpožděním

Regulační schéma jsme vytvořili v MATLABu. Využili jsme ho k simulaci regulačního pochodu uvedeného na obr.16.

Jde o základní RO, do kterého přidáme blok dopravní zpoždění.

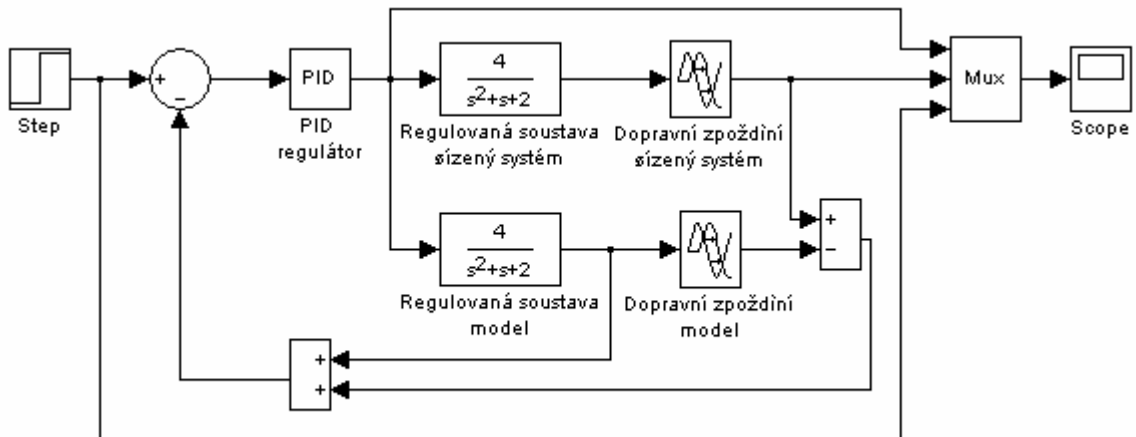


Obr.17 Simulace regulačního pochodu bez použití Smithova prediktoru pro periodický systém

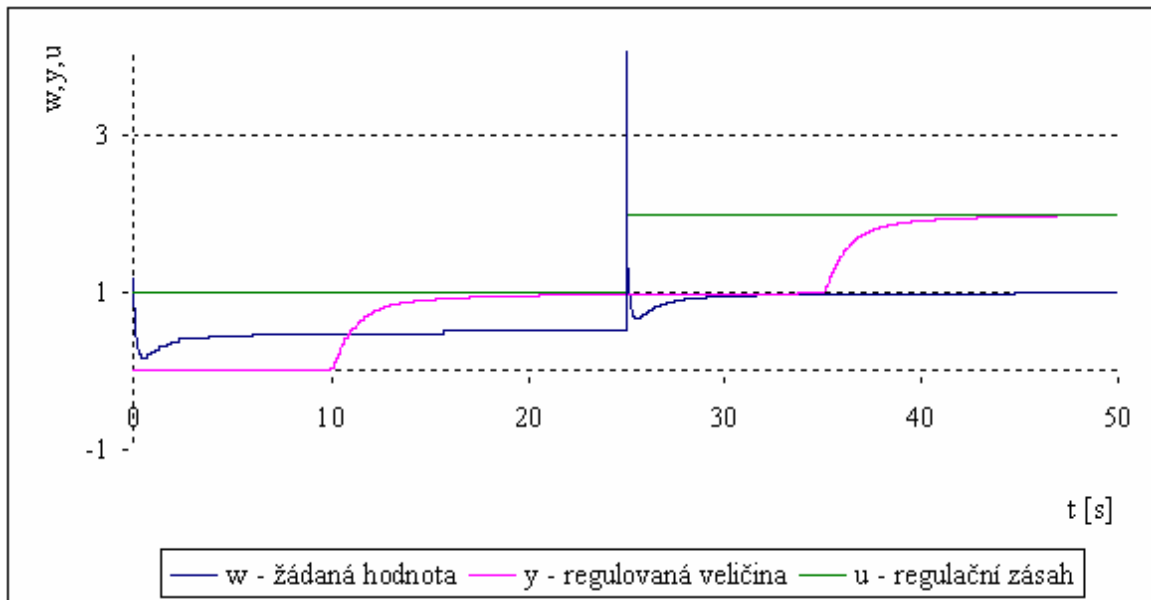
K danému systému jsme přidali dopravní zpoždění  $\Theta \in \langle 10 \rangle$ . Tedy maximální povolené v zadání, což mělo velký vliv na regulační pochod.

Jak je vidět z obr.17, bez použití Smithova prediktoru tradiční zpětnovazební zapojení nedává pro daný systém stabilní regulační pochod.



**b) se Smithovým prediktorem**


Obr.18 Simulační schéma regulačního obvodu Smithův prediktor



Obr.19 Simulace regulačního pochodu s využitím Smithova prediktoru pro periodický systém

Z obrázku vidíme, jak velký vliv na stabilitu celého systému může mít použití Smithova prediktoru.

Zkvalitní se celý regulační pochod.

**2.3.4 Návrh struktury řízení pro 1DOF a 2DOF konfiguraci**

*Navrhněte pomocí polynomiální syntézy spojitý regulátor, zajišťující stabilitu regulačního obvodu a asymptotické sledování žádané hodnoty, pro 1DOF i 2DOF*

*strukturu řízení. Polynom  $d$  na pravých stranách Diofantických rovnic volte ve tvaru  $d = (s + m)^{\deg d}$ , tedy  $s$  násobným kořenem. Regulátory navrhnete a regulační pochody simulujte pro několik hodnot násobného pólu, vizuálně zhodnoťte jejich kvalitu a „nejlepší“ regulační pochod uveďte do protokolu.*

### a) Návrh regulátoru pro strukturu řízení 1DOF

$$\text{Přenos regulované soustavy: } G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Zavedeme předpoklad, že veškeré poruchy působící na systém se rovnají nule.

$$w(t)=1 \quad v(t)=0 \quad w(s)=\frac{1}{s} \quad fw = s \quad v(s)=0 \quad fv = fn = 1 \quad f = s$$

$$\text{st } a = 2 \quad \text{st } b = 0 \quad \text{st } f = 1 \quad \text{st } q = 2 \quad \text{st } p = 1 \quad \text{st } d = 4$$

$$q(s) = q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \tag{21}$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0 \tag{22}$$

$$d(s) = s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = (s + m)^4 \tag{23}$$

$$G_R(s) = \frac{q}{p} = \frac{q}{f \cdot \tilde{p}} = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s(\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0)} \tag{24}$$

Rovnice (24) má integrační složku

Sestavíme základní Diofantickou rovnici:

$$af\tilde{p} + bq = d \tag{25}$$

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)s(\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0) + b_0(q_2 s^2 + q_1 s + q_0) = s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$$

$$a_2 \tilde{p}_1 s^4 + (a_2 \tilde{p}_0 + a_1 \tilde{p}_1) s^3 + (a_1 \tilde{p}_0 + a_0 \tilde{p}_1 + b_0 q_2) s^2 + (a_0 \tilde{p}_0 + b_0 q_1) s + b_0 q_0 = s^4 + \dots + d_1 s + d_0$$

Roznásobením a porovnáním koeficientů u příslušných mocnin proměnné  $s$  převedeme problém vyřešení jedné Diofantické rovnice na řešení soustavy pěti lineárních rovnic o pěti neznámých.

$$\begin{aligned}
s^4: & \quad a_2 \tilde{p}_1 = 1 \\
s^3: & \quad a_2 \tilde{p}_0 + a_1 \tilde{p}_1 = d_3 \\
s^2: & \quad a_1 \tilde{p}_0 + a_0 \tilde{p}_1 + b_0 q_2 = d_2 \\
s^1: & \quad a_0 \tilde{p}_0 + b_2 q_1 = d_1 \\
s^0: & \quad b_0 q_0 = d_0
\end{aligned} \tag{26}$$

$$A \cdot X = B \tag{27}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

$$d(s) = (s + m)^4 = s^4 + 4s^3m + 6s^2m^2 + 4sm^3 + m^4$$

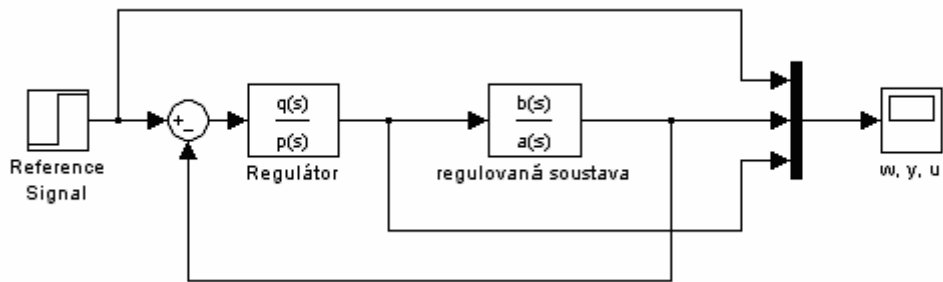
$$d_3 = 4m$$

$$d_2 = 6m^2$$

$$d_1 = 4m^3$$

$$d_0 = m^4$$

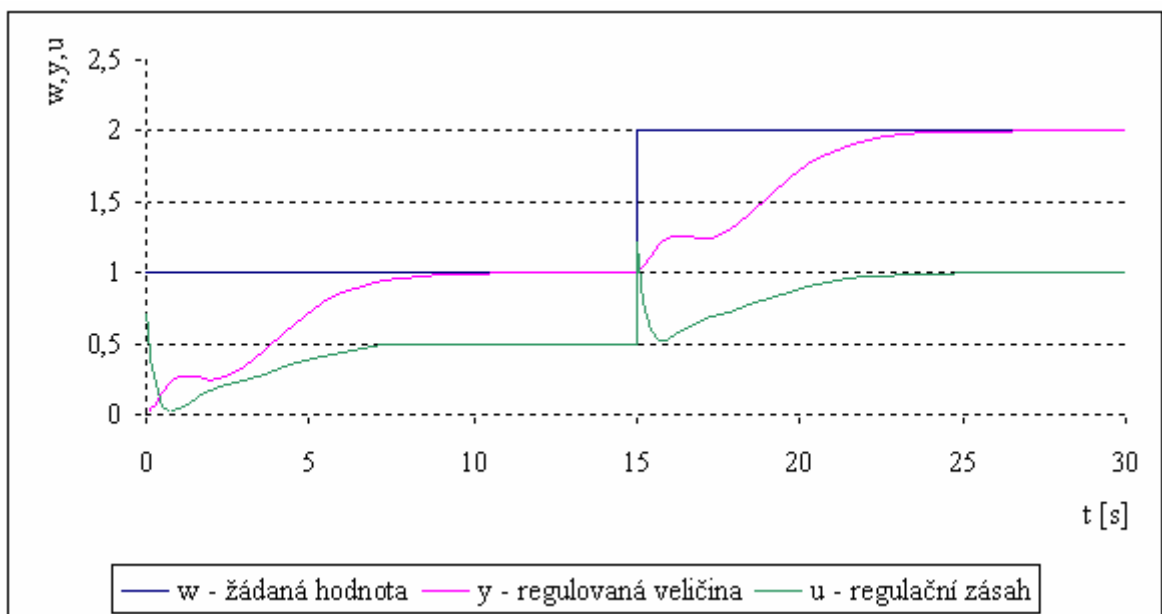
Při výpočtu parametrů regulátoru použijeme m-file v programu MATLAB, protože ruční výpočet je zdlouhavý (viz příloha P1).



Obr.20 Simulační schéma vytvořené k simulaci struktury řízení IDOF

Zvolíme za  $m = 1,2$  obdržíme regulátor ve tvaru:

$$G_R(s) = \frac{q}{f \tilde{p}} = \frac{0,71s^2 - 0,172s + 0,5184}{s(s + 3,8)}$$



Obr.21 Simulace regulačního pochodu strukturou řízení IDOF pro periodickou soustavu

Při simulaci jsme volili několik parametrů  $m$ , přičemž „vhodný“ regulační pochod zajistíme pro ladící parametr  $m = 1,2$ . Při zvyšování  $m$  se regulovaná veličina ustálí rychleji na žádané hodnotě, ale regulátor musí více zasahovat do regulačního pochodu.

**b) Návrh regulátoru pro strukturu řízení 2DOF**

Máme soustavu s přenosem:  $G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$

$$w(t)=1 \quad v(t)=0 \quad w(s)=\frac{1}{s} \quad fw = s \quad v(s)=n(s)=0 \quad fv = fn = 1$$

$$f_1 = 1 \quad f_2 = s \quad st f_1 = 0 \quad st f_2 = 1 \quad st a = 2 \quad st b = 0$$

$$st q = 1 \quad st r = 0 \quad st p = 1 \quad st d = 3 \quad st t = 2 \quad k = -1$$

$$q(s) = q_1 s + q_0 \tag{28}$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0 \tag{29}$$

$$r(s) = r_0 \tag{30}$$

$$t(s) = t_2 s^2 + t_1 s + t_0 \tag{31}$$

$$d(s) = s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 \tag{32}$$

$$G_{zv}(s) = \frac{q}{p} = \frac{q}{f_1 \cdot \tilde{p}} = \frac{q_1 s + q_0}{\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0} \tag{33}$$

$$G_{pv}(s) = \frac{r}{p} = \frac{r_0}{\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0} \tag{34}$$

První Diofantická rovnice:

$$af_1 \tilde{p} + bq = d \tag{35}$$

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)(\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0) + b_0 (q_1 s + q_0) = s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = (s + m)^3$$

$$a_2 \tilde{p}_1 s^3 + (a_2 \tilde{p}_0 + a_1 \tilde{p}_1) s^2 + (a_1 \tilde{p}_0 + a_0 \tilde{p}_1 + b_0 q_1) s + a_0 \tilde{p}_0 + b_0 q_0 = s^4 + \dots + d_1 s + d_0$$

$$s^3: \quad a_2 \tilde{p}_1 = 1$$

$$s^2: \quad a_2 \tilde{p}_0 + a_1 \tilde{p}_1 = d_2$$

$$s^1: \quad a_1 \tilde{p}_0 + a_0 \tilde{p}_1 + b_0 q_1 = d_1$$

$$s^0: \quad a_0 \tilde{p}_0 + b_0 q_0 = d_0$$

(36)

$$A \cdot X = B \quad (37)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

$$d(s) = (s + m)^3 = s^3 + 3s^2m + 3sm^2 + m^3$$

$$d_2 = 3m$$

$$d_1 = 3m^2$$

$$d_0 = m^3$$

Druhá Diofantická rovnice:

$$tf_2 + br = d \quad (38)$$

$$(t_2s^2 + t_1s + t_0) \cdot s + b_0r_0 = s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 \quad (39)$$

$$s^3: \quad t_2 = 1$$

$$s^2: \quad t_1 = d_2$$

$$s^1: \quad t_0 = d_1$$

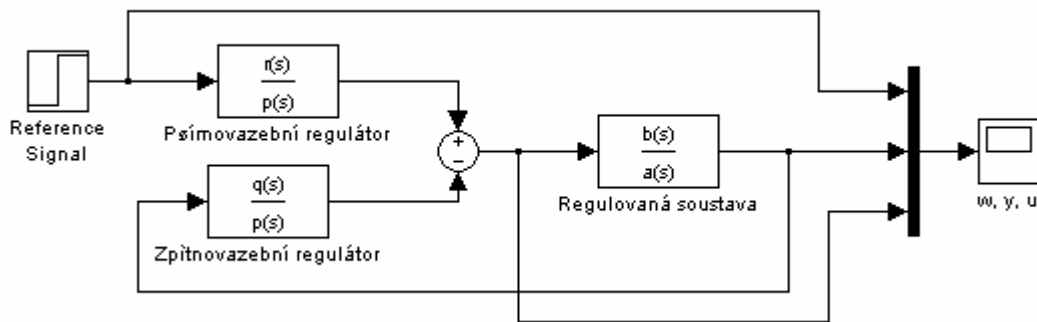
$$s^0: \quad b_0r_0 = d_0$$

$$C \cdot X = D \quad (41)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

Dále jsme při výpočtu parametrů regulátoru využili m-filu vytvořeného v MATLABu (viz příloha P2).

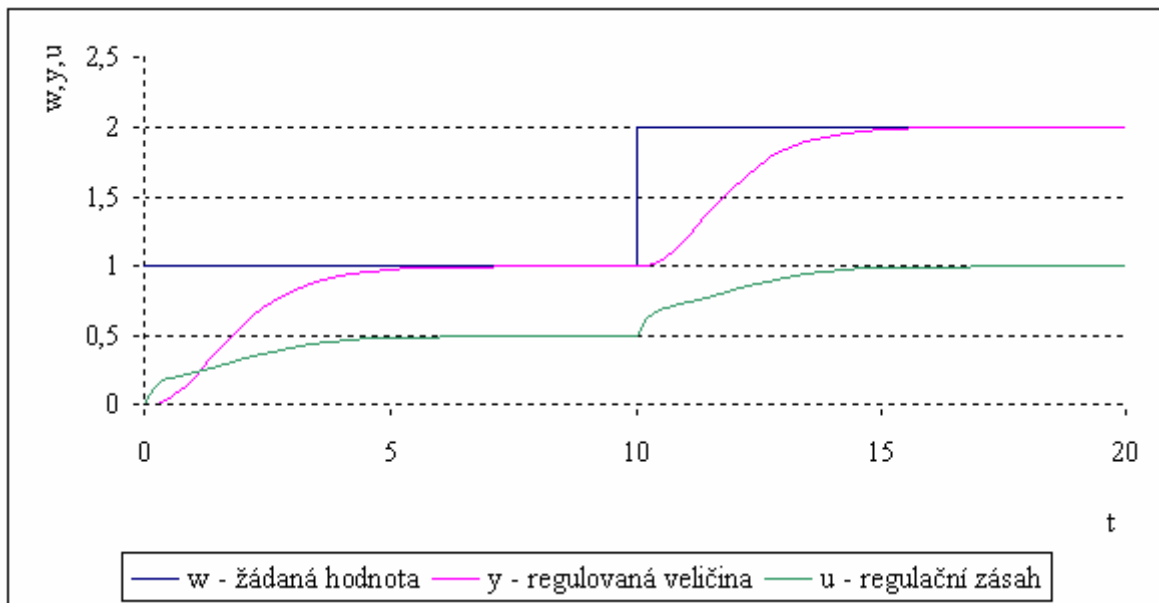


Obr.22 Simulační schéma vytvořené k simulaci struktury řízení 2DOF

Dosadíme za  $m = 1,5$  dostáváme:

$$G_{zV}(s) = \frac{0,3125s - 0,9063}{s + 3,5}$$

$$G_{pV}(s) = \frac{0,8438}{s + 3,5}$$



Obr.23 Simulace regulačního pochodu strukturou řízení 2DOF pro periodickou soustavu

„Optimálního“ regulačního pochodu dosáhneme při volbě parametru  $m = 1,5$ . Struktura obvodu 2DOF kompenzuje nežádoucí podkmity u regulované veličiny, na rozdíl od metody 1DOF, kde se tyto podkmity objevují.

### 2.3.5 Popis systému ve stavovém prostoru, říditelnost a pozorovatelnost systému

*Napište libovolný stavový popis. Ze stavového popisu získejte zpět přenosovou funkci. Sestavte matice říditelnosti a pozorovatelnosti a rozhodněte, je-li systém říditelný, resp. pozorovatelný.*

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{4}{s^2 + s + 2} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$4u(t) = y'(t) + y'(t) + 2y(t)$$

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2'(t) = 4u(t) - x_2(t) - 2x_1(t)$$

$$x_2(t) = y'(t)$$



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + 0 u(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0)$$

$$D = 0$$

Zpětný převod:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{42}$$

$$\det = s^2 + s + 2$$

$$\begin{aligned} G(s) &= (1 \ 0) \cdot \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + s + 2} = \frac{4}{s^2 + s + 2} \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2}$$

Určení matice říditelnosti a pozorovatelnosti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R = (B; A \cdot B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\det R = -16 \neq 0 \quad \text{je říditelný a dosažitelný}$$

$$C = (1 \ 0)$$

$$P = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \end{pmatrix} = (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

$$\det P = 2 \neq 0 \quad \text{je pozorovatelný a rekonstruovatelný}$$

Determinanty obou matic se nerovnjí nule, z čehož plyne, že systém je jak říditelný a dosažitelný, tak pozorovatelný i rekonstruovatelný.

### 2.3.6 Závěr protokolu č.2 – syntéza RO a vnitřní popis pro periodickou soustavu

Zadaný přenos soustavy: 
$$G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2}$$

Pomocí kritéria stability jsme navrhli spojitý regulátor a simulačně ověřili jeho funkčnost v prostředí MATLAB-SIMULINK.

Navrhli jsme PI regulátor: 
$$G_R(s) = 5 + \frac{4}{s}$$

Na obr.12 si všimněme regulované veličiny, které trvá delší dobu než se ustálí na žádané hodnotě.

Dále jsme navrhli spojitý regulátor dvěma klasickými metodami, který zajišťuje stabilní regulační pochod a sledování žádané veličiny. Řízení systému jsme simulovali v prostředí MATLAB-SIMULINK.

a) Využili jsme Whiteleyovu metodu návrhu regulátoru

Navrhli jsme PI D regulátor: 
$$G_R(s) = 1,175 + \frac{0,25}{s} + 1,425s$$

Na obr.13 vidíme, že regulátor navržený Whiteleyho metodou má „lepší“ regulační pochod v porovnání s předchozí metodou.

Regulovaná veličina se ustálila poměrně rychle na žádané hodnotě

b) Nastavení z přechodové charakteristiky (modifikovaná Ziegler-Nicholsova metoda)

Navrhli jsme PID regulátor: 
$$G_R(s) = 2,3541 + \frac{3,9658}{s} + 0,3494s$$

Z obr.15 je vidět, že regulátor navržený modifikovanou metodou Ziegler-Nichols nezajišťuje tak „kvalitní“ regulační pochod v porovnání s předchozí metodou.

K danému systému jsme přidali dopravní zpoždění  $\Theta \in \langle 10 \rangle$  a řídili jej pomocí regulátoru navrženého *Whiteleyovou* metodou a to nejprve v základním RO a poté pomocí Smithova prediktoru.

Uvažovali jsme PI D regulátor:  $G_R(s) = 2,3541 + \frac{3,9658}{s} + 0,3494s$

Jak je vidět z obr.17, bez použití Smithova prediktoru tradiční zpětnovazební zapojení nedává pro daný systém stabilní regulační pochod.

Z obr.19 vidíme, jak velký vliv na stabilitu celého systému může mít použití Smithova prediktoru. Regulovaná veličina se poměrně rychle ustálí na žádané hodnotě.

Tím se zkvalitní celý regulační pochod.

K simulaci průběhů jsme využili schémat vytvořených v programu MATLAB, které vidíme na obr.16 a obr. 18.

Následně jsme navrhovali strukturu řízení 1DOF a 2 DOF.

a) pro 1DOF

Při simulaci jsme volili několik  $m$ , přičemž „vhodný“ regulační pochod zajistíme pro  $m = 1,5$ .

$$G_R(s) = \frac{0,71s^2 - 0,172s + 0,5184}{s(s + 3,8)}$$

Při zvyšování  $m$  se regulovaná veličina ustálí rychleji na žádané hodnotě, ale regulátor musí více zasahovat do regulačního pochodu.

b) pro 2DOF

„Optimálního“ regulačního pochodu dosáhneme při volbě parametru  $m = 1,5$ .

$$G_{ZV}(s) = \frac{0,3125s - 0,9063}{s + 3,5}$$

$$G_{PV}(s) = \frac{0,8438}{s + 3,5}$$

Struktura řízení 2 DOF kompenzuje nežádoucí podkmity u regulované veličiny, na rozdíl od struktury řízení 1DOF, kde se tyto podkmity objevují.

Nakonec jsme dosadili hodnoty ze zadání do přenosu  $G(s) = \frac{4}{s^2 + s + 2}$  a k tomuto systému

napsali stavový popis. Ze stavového popisu jsme získali zpět přenosovou funkci. Sestavili

jsme matice říditelnosti a pozorovatelnosti. Při zkoumání jsem došli k závěru, že systém je jak říditelný a dosažitelný, tak i pozorovatelný a rekonstruovatelný.

## 2.4 Protokol č.2 – syntéza RO a vnitřní popis pro aperiodickou soustavu

Jednorozměrný lineární spojité dynamický systém je dán diferenciální rovnicí :

$$a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \quad (43)$$

Dosaďte hodnoty podle individuálního zadání (viz protokol č. 2.2) a k tomuto systému vypracujte následující úkoly:

### 2.4.1 Regulátor navržený pomocí kritéria stability

*Pomocí kritéria stability navrhnete spojité regulátor a simulačně ověřte jeho funkčnost.*

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{b}{a}$$

$$G_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s} = \frac{q}{p} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} \Rightarrow r_0 = q_1; r_{-1} = q_0$$

Charakteristický polynom u RO je  $\Rightarrow ap + bq$

$$(s^2 + 5s + 4)s + (q_1 s + q_0) = d$$

$$s^3 + 5s^2 + (4 + q_1)s + q_0 = d$$

Pomocí Routh-Schurova kritéria stability určíme stabilitu systému

1	5	4 + q <sub>1</sub>	q <sub>0</sub>
1		q <sub>0</sub>	· (-1)
0	5	4 + q <sub>1</sub> - q <sub>0</sub>	q <sub>0</sub>

$$q_0 > 0$$

$$q_0 = 1 = r_{-1}$$

$$4 + q_1 - q_0 > 0$$

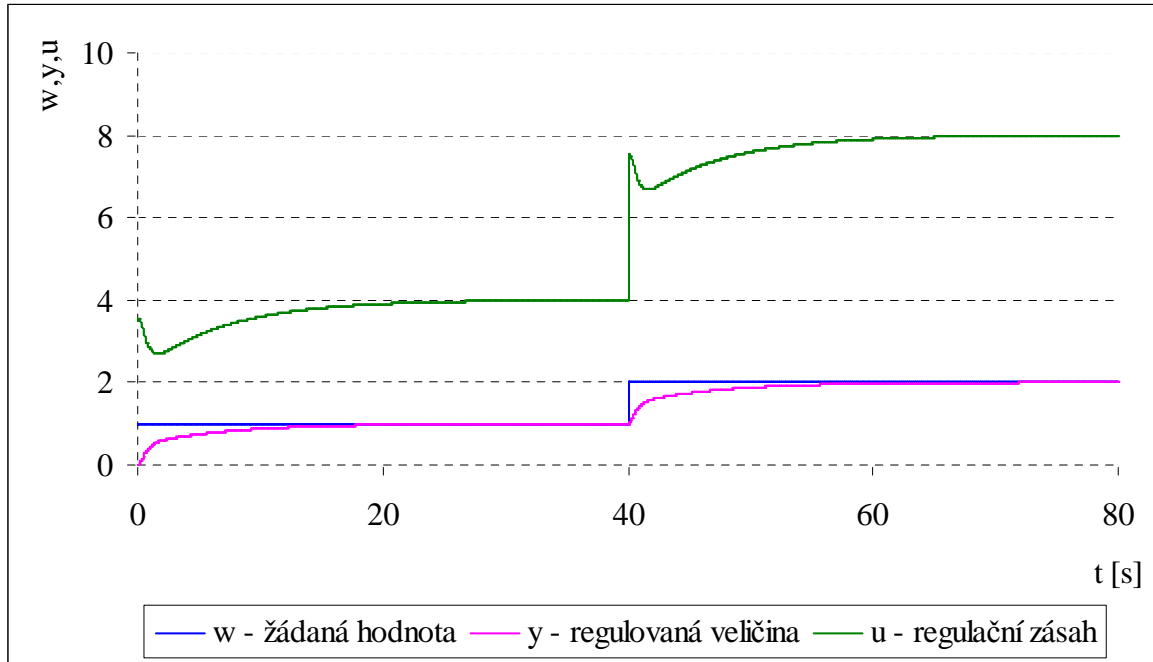
$$q_1 > q_0 - 4 = 1 - 4 = 3$$

$$q_1 > 3$$

$$q_1 = 3,5 = r_0$$

Po úpravě dostáváme následující parametry PI regulátoru:

$$G_R(s) = \frac{q_1 s + q_0}{s} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} = 3,5 + \frac{1}{s}$$



Obr.24 Simulace regulačního pochodu s využitím kritéria stability pro aperiodickou soustavu

Porovnáme-li tuto metodu návrhu regulátoru s metodami Åströмова a Ziegler–Nicholsova vidíme, že ustálení regulované veličiny na žádané hodnotě trvá nejdelší dobu. Naproti tomu nemusí regulátor tolik zasahovat.

#### 2.4.2 Návrh regulátoru dvěma klasickými metodami

*Libovolnými dvěma „klasickými metodami“ navrhnete spojité regulátor, který zajistí stabilní regulační pochod a sledování žádané veličiny. Řízení systému simulujte.*

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = u(t)$$

##### a) Åströмова metoda

Hodnoty  $T_u$ ,  $T_n$ ,  $K$  určíme stejným postupem, jako v předešlém protokolu 2.3, přičemž využijeme i stejných simulačních schémat. Budeme měnit pouze parametry regulátoru a soustavy.

$$T_u = L = 0,1246$$

$$T_n = 1,5878$$

$$K = 0,25$$

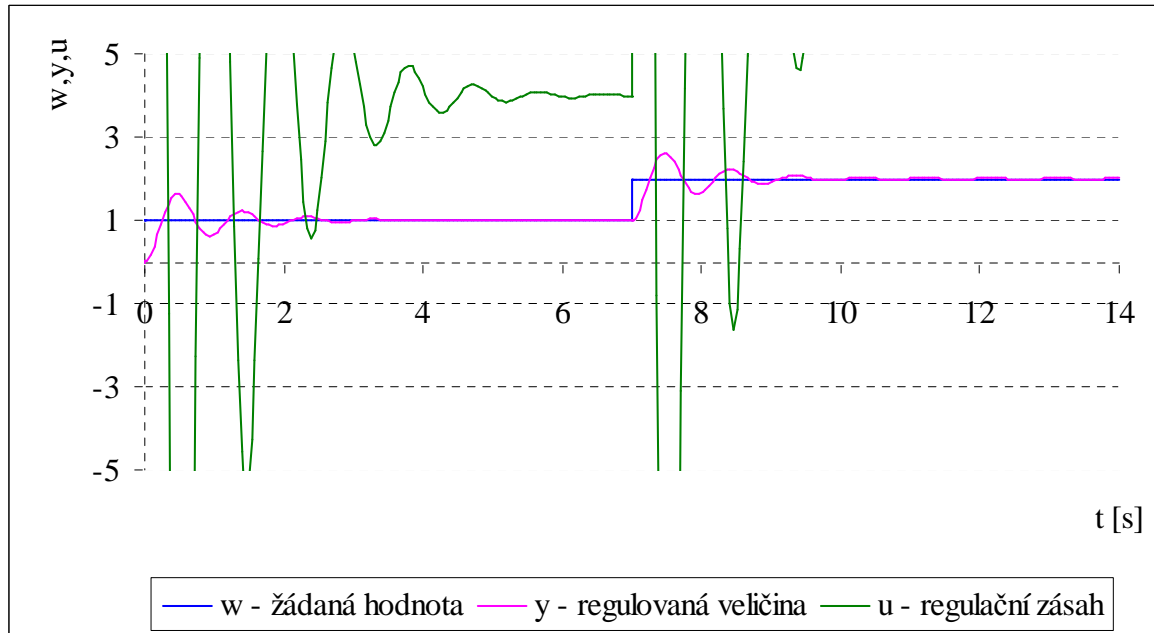
$$a = \frac{K \cdot L}{T_n} = \frac{0,25 \cdot 0,1246}{1,5878} = 0,0196$$

Návrh PI regulátoru:

$$k_p = 0,9 \cdot \frac{1}{a} = 0,9 \cdot \frac{1}{0,0196} = 45,9184 \Rightarrow r_0 = 45,9184$$

$$T_I = 3 \cdot L = 3 \cdot 0,1246 = 0,3738 \Rightarrow r_{-1} = \frac{r_0}{T_I} = 122,8422$$

Úpravou obdržíme PI regulátor ve tvaru:  $G_R(s) = 45,9184 + \frac{122,8422}{s}$



Obr.25 Simulace regulačního pochodu pomocí Åströmovi metody pro aperiodickou soustavu

U této metody návrhu regulátoru vidíme celkem „rychlé“ ustálení regulované veličiny na žádané hodnotě. Naproti tomu amplituda regulačního zásahu je poněkud zvlněná.

**b) Nastavení z přechodové charakteristiky (modifikovaná Ziegler–Nicholsova metoda)**

$$T_u = 0,1246$$

$$T_n = 1,5878$$

$$K = 0,25$$

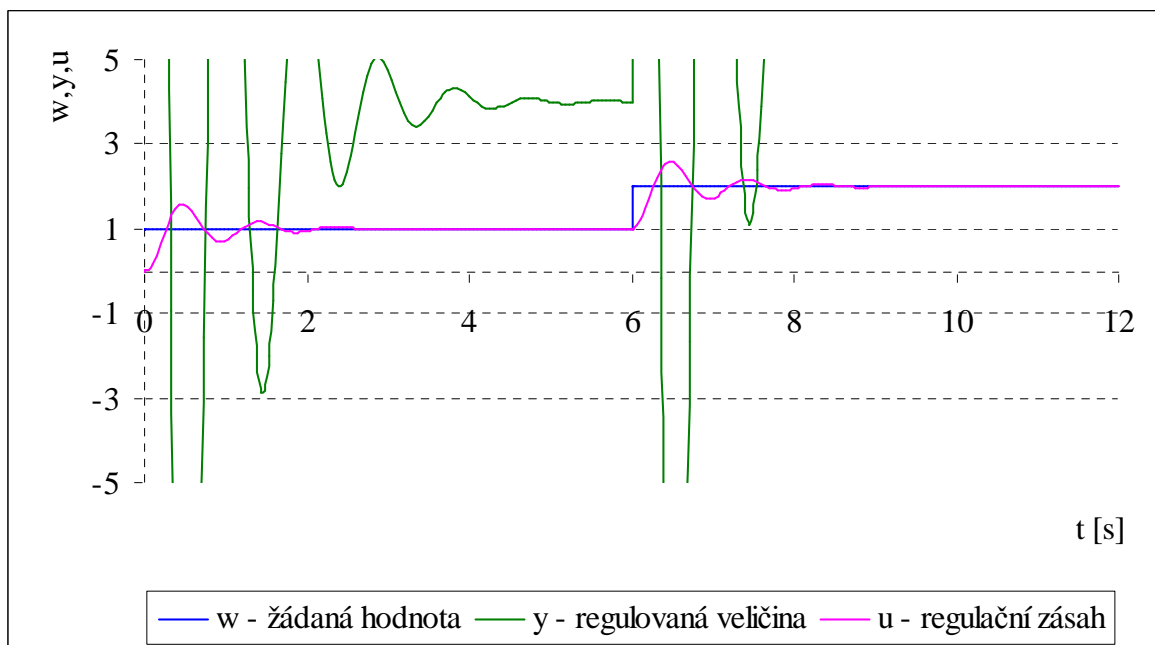
$$\gamma = \frac{T_n}{T_u} = \frac{1,5878}{0,1246} = 12,7432$$

Návrh PI regulátoru:

$$k_p = 0,9 \cdot \gamma \frac{1}{K} = 0,9 \cdot 12,7432 \cdot \frac{1}{0,25} = 45,8754 \Rightarrow r_0 = 45,8754$$

$$T_I = 3,5 \cdot T_u = 3,5 \cdot 0,1246 = 0,4361 \Rightarrow r_{-1} = \frac{r_0}{T_I} = 105,1948$$

Výsledný PI regulátor dostaneme ve tvaru:  $G_R(s) = 45,8754 + \frac{105,1948}{s}$



Obr.26 Simulace regulačního pochodu s využití modifikované Ziegler–Nicholsovi metody pro aperiodickou soustavu

Na obrázku vidíme podobný průběh jako u předchozí metody. Srovnáme-li obrázky důkladněji, můžeme říct že regulační pochod je lepší než u předešlé metody.

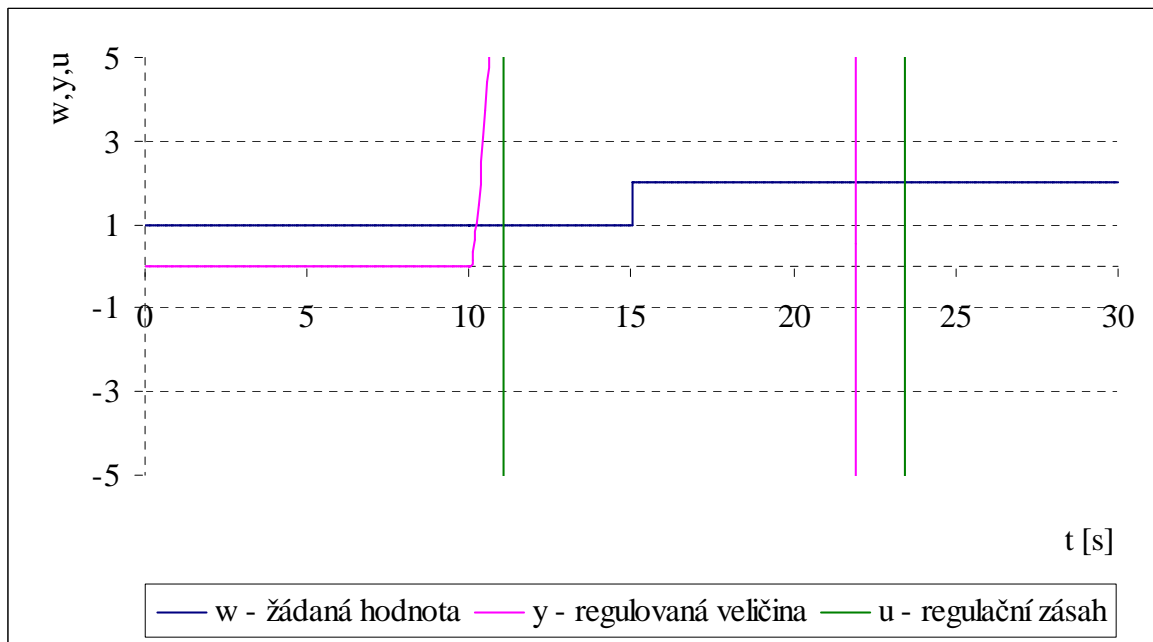
### 2.4.3 Přidání dopravního zpoždění na daný systém a jeho řízení

*K danému systému přidejte dopravní zpoždění  $\Theta \in \langle 1;10 \rangle$  a řiďte jej pomocí regulátoru navrženého v jedné z metod z předchozího bodu a to nejprve v základním regulačním obvodu a poté pomocí Smithova prediktoru.*

Hodnoty regulátoru bereme z výpočtu modifikované Ziegler–Nicholsovi metody, protože regulační pochod je „přijatelnější“ než u Åströmovi metody.

Regulátor PI dostaneme ve tvaru:  $G_R(s) = 45,8754 + \frac{105,1948}{s}$

#### a) bez Smithova prediktoru



Obr.27 Simulace regulačního pochodu bez použití Smithova prediktoru pro aperiodickou soustavu

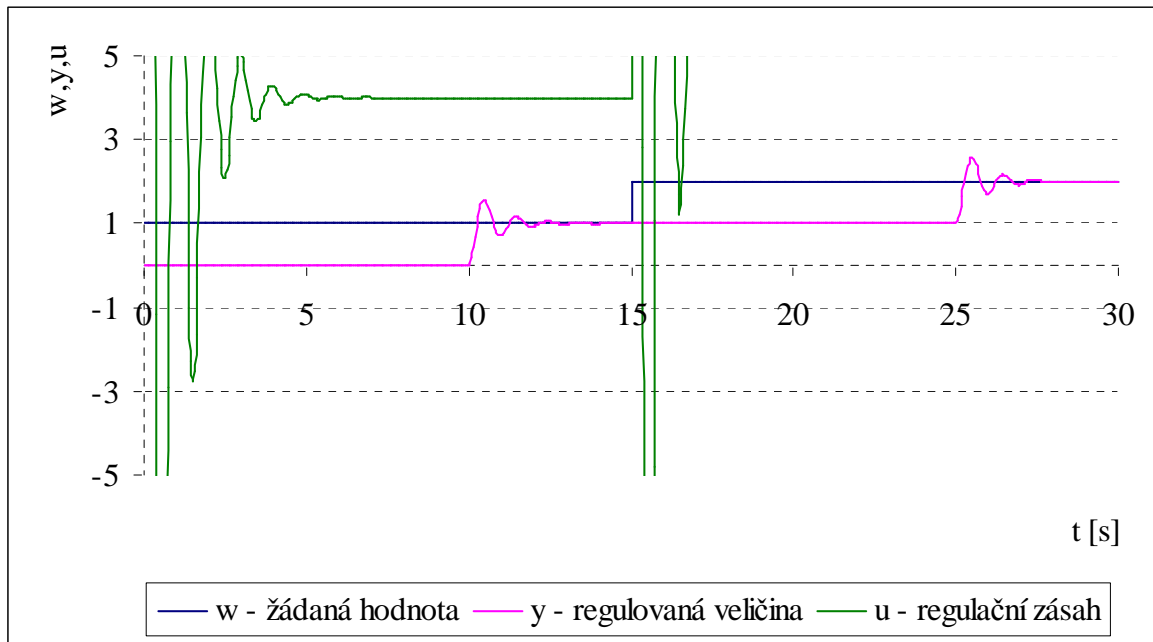
Provedli jsme simulaci regulace pomocí modifikované Ziegler–Nicholsovi metody v základním regulačním obvodu bez použití Smithova prediktoru.

Opět vidíme jak velký vliv na stabilitu celého systému má dopravní zpoždění.

Celý systém se stává nestabilním.

#### b) se Smithovým prediktorem





Obr.28 Simulace regulačního pochodu s využitím Smithova prediktoru pro aperiodickou soustavu

Můžeme říct, že Smithův prediktor má opět velký vliv na stabilitu celého systému s dopravním zpožděním.

#### 2.4.4 Návrh struktury řízení pro 1DOF a 2DOF konfiguraci

*Navrhněte pomocí polynomiální syntézy spojitý regulátor, zajišťující stabilitu regulačního obvodu a asymptotické sledování žádané hodnoty, pro 1DOF i 2DOF strukturu řízení. Polynom  $d$  na pravých stranách Diofantických rovnic volte ve tvaru  $d = (s + m)^{\text{deg } d}$ , tedy s násobným kořenem. Regulátory navrhněte a regulační pochody simulujte pro několik hodnot násobného pólu, vizuálně zhodnoťte jejich kvalitu a „nejlepší“ regulační pochod uveďte do protokolu*

##### a) Návrh regulátoru pro strukturu řízení 1DOF

$$\text{Máme soustavu ve tvaru: } G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$w(t)=1 \quad v(t)=0 \quad w(s)=\frac{1}{s} \quad f_w = s \quad v(s)=0 \quad f_v = f_n = 1 \quad f = s$$

$$\text{st } a = 2 \quad \text{st } b = 0 \quad \text{st } f = 1 \quad \text{st } q = 2 \quad \text{st } p = 1 \quad \text{st } d = 4$$

$$q(s) = q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad (44)$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0 \quad (45)$$

$$d(s) = s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = (s + m)^4 \quad (46)$$

$$G_R(s) = \frac{q}{p} = \frac{q}{f \cdot \tilde{p}} = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + q_0}{s(\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0)} \quad (47)$$

Rovnice (47) má integrační složku

Diofantická rovnice

$$a\tilde{p} + bq = d \quad (48)$$

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)s(\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0) + b_0(q_2 s^2 + q_1 s + q_0) = s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$$

$$a_2 \tilde{p}_1 s^4 + (a_2 \tilde{p}_0 + a_1 \tilde{p}_1) s^3 + (a_1 \tilde{p}_0 + a_0 \tilde{p}_1 + b_0 q_2) s^2 + (a_0 \tilde{p}_0 + b_0 q_1) s + b_0 q_0 = s^4 + \dots + d_1 s + d_0$$

$$s^4: \quad a_2 \tilde{p}_1 = 1$$

$$s^3: \quad a_2 \tilde{p}_0 + a_1 \tilde{p}_1 = d_3$$

$$s^2: \quad a_1 \tilde{p}_0 + a_0 \tilde{p}_1 + b_0 q_2 = d_2 \quad (49)$$

$$s^1: \quad a_0 \tilde{p}_0 + b_0 q_1 = d_1$$

$$s^0: \quad b_0 q_0 = d_0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_2 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

$$d(s) = (s + m)^4 = s^4 + 4s^3m + 6s^2m^2 + 4sm^3 + m^4$$

$$d_3 = 4m$$

$$d_2 = 6m^2$$

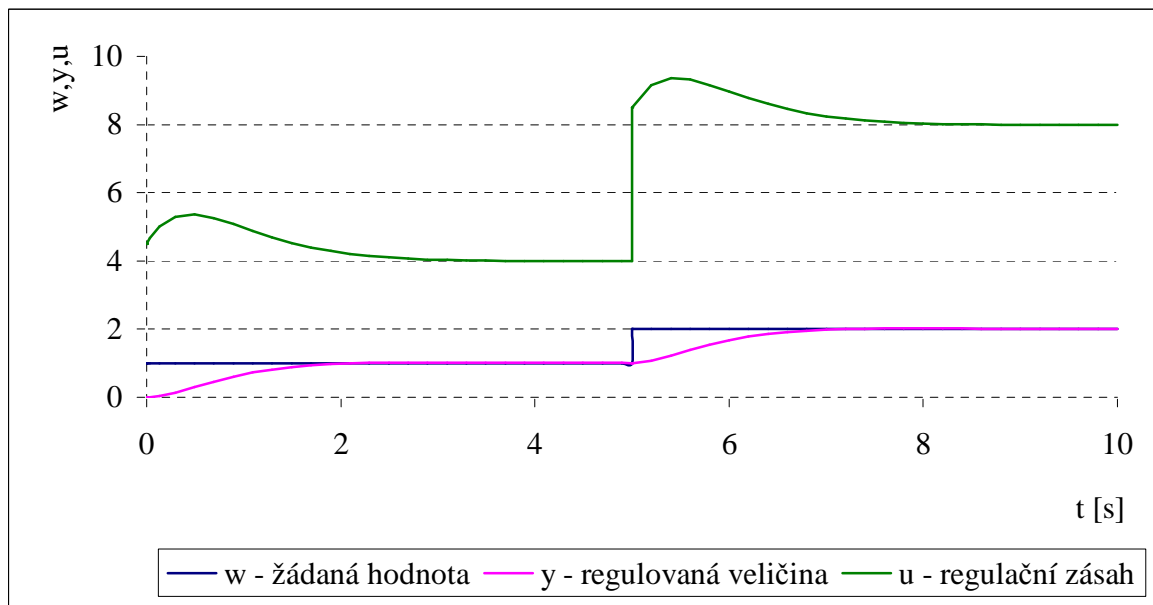
$$d_1 = 4m^3$$

$$d_0 = m^4$$

Stejně tak použijeme při výpočtu parametrů regulátoru m-file v program MATLAB, ulehčíme si od ručního výpočtu (viz příloha P1).

Zvolíme za ladící parametr  $m = 1,5$  obdržíme tak regulátor ve tvaru:

$$G_R(s) = \frac{q}{f p} = \frac{4,5s^2 + 9,5s + 5,0625}{s(s+1)}$$



Obr.29 Simulace regulačního pochodu strukturou řízení 1DOF pro aperiodickou soustavu

Regulaci jsme simulovali pro několik parametrů  $m$ , přičemž „optimální“ regulační pochod zajistíme pro parametr  $m = 1,5$ . Při zvyšování  $m$  se urychlí regulační pochod. Naproti tomu vzniká nežádoucí stále vyšší nadkmit. Jednak u regulované veličiny ale i u regulačního zásahu.

**b) Návrh regulátoru pro strukturu řízení 2.DOF**

$$\text{Soustava má tvar: } G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$w(t)=1 \quad v(t)=0 \quad w(s)=\frac{1}{s} \quad fw = s \quad v(s)=n(s)=0 \quad fv = fn = 1$$

$$f_1 = 1 \quad f_2 = s \quad st f_1 = 0 \quad st f_2 = 1 \quad st a = 2 \quad st b = 0$$

$$st q = 1 \quad st r = 0 \quad st p = 1 \quad st d = 3 \quad st t = 2 \quad k = -1$$

$$q(s) = q_1s + q_0 \tag{50}$$

$$\tilde{p}(s) = \tilde{p}_1s + \tilde{p}_0 \tag{51}$$

$$r(s) = r_0 \tag{52}$$

$$t(s) = t_2s^2 + t_1s + t_0 \tag{53}$$

$$d(s) = s^4 + d_3s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 \tag{54}$$

$$G_{zv}(s) = \frac{q}{p} = \frac{q}{f_1 \cdot \tilde{p}} = \frac{q_1s + q_0}{\tilde{p}_1s + \tilde{p}_0} \tag{55}$$

$$G_{pv}(s) = \frac{r}{p} = \frac{r_0}{\tilde{p}_1s + \tilde{p}_0} \tag{56}$$

První Diofantická rovnice:

$$af_1\tilde{p} + bq = d \tag{57}$$

$$(a_2s^2 + a_1s + a_0)(\tilde{p}_1s + \tilde{p}_0) + b_0(q_1s + q_0) = s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 = (s + m)^3$$

$$a_2\tilde{p}_1s^3 + (a_2\tilde{p}_0 + a_1\tilde{p}_1)s^2 + (a_1\tilde{p}_0 + a_0\tilde{p}_1 + b_0q_1)s + a_0\tilde{p}_0 + b_0q_0 = s^4 + \dots + d_1s + d_0$$

$$s^3: \quad a_2\tilde{p}_1 = 1$$

$$s^2: \quad a_2\tilde{p}_0 + a_1\tilde{p}_1 = d_2$$

$$s^1: \quad a_1\tilde{p}_0 + a_0\tilde{p}_1 + b_0q_1 = d_1$$

$$s^0: \quad a_0\tilde{p}_0 + b_0q_0 = d_0$$

(58)

$$A \cdot X = B \quad (59)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & b_0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_0 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

$$d(s) = (s + m)^3 = s^3 + 3s^2m + 3sm^2 + m^3$$

$$d_2 = 3s^2m$$

$$d_1 = 3sm^2$$

$$d_0 = m^3$$

Druhá Diofantická rovnice:

$$tf_2 + br = d \quad (60)$$

$$(t_2s^2 + t_1s + t_0) \cdot s + b_0r_0 = s^3 + d_2s^2 + d_1s + d_0 \quad (61)$$

$$s^3: \quad t_2 = 1$$

$$s^2: \quad t_1 = d_2$$

$$s^1: \quad t_0 = d_1$$

$$s^0: \quad b_0r_0 = d_0$$

$$C \cdot X = D \quad (63)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$$

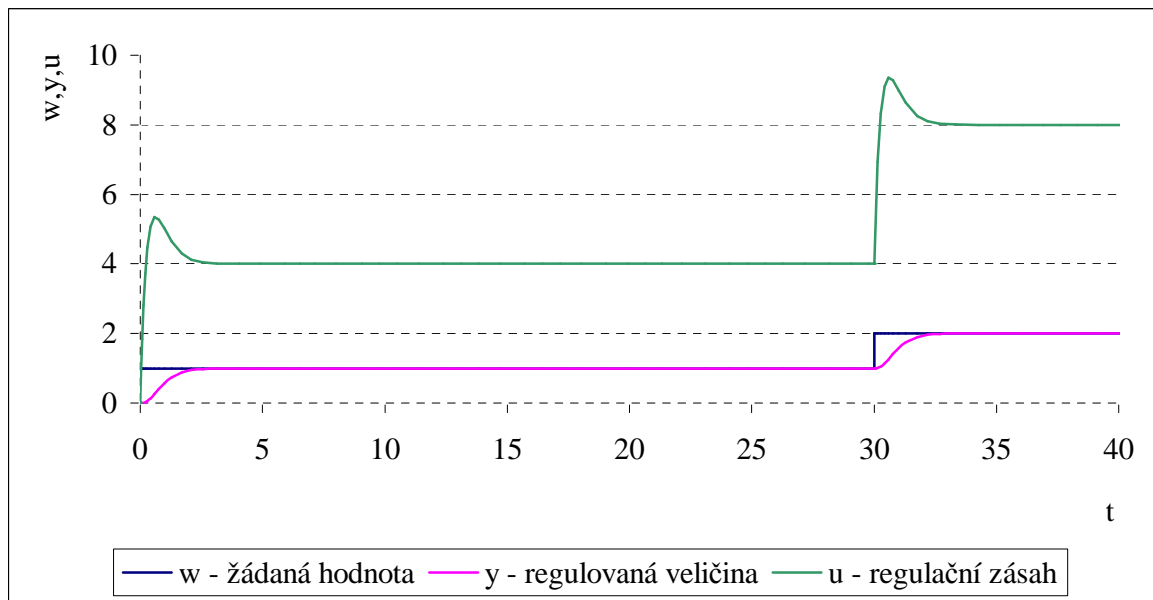
$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

Opět jsme při výpočtu parametrů regulátoru využili m-filu vytvořeného v MATLABu (viz příloha P2).

Zvolíme-li za ladící parametr  $m = 3$  dostaneme:

$$G_{ZV}(s) = \frac{3s+11}{s+4}$$

$$G_{PV}(s) = \frac{27}{s+4}$$



Obr.30 Simulace regulačního pochodu strukturou řízení 2DOF pro aperiodickou soustavu

Dále jsme provedli simulaci pro několik parametrů  $m$ , a došli k následujícímu závěru. Při volbě  $m < 1$  je systém značně rozkmitaný. Regulátor nezvládá svoji funkci.

„Optimální“ simulace je pro ladící parametr  $m = 3$  a dále při zvyšujícím  $m$  se krátí čas regulace. Naproti tomu narůstá nadkmit u regulačního zásahu.

V praxi záleží pro jakou soustavu budeme regulátor navrhovat.

#### 2.4.5 Popis systému ve stavovém prostoru, říditelnost a pozorovatelnost systému

*Dosaďte hodnoty z Vašeho zadání do přenosu  $G(s) = \frac{s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$  a k tomuto systému*

*napište libovolný stavový popis. Ze stavového popisu získejte zpět přenosovou funkci. Sestavte matice říditelnosti i pozorovatelnosti a rozhodněte, je-li systém říditelný, resp. pozorovatelný.*

$$G(s) = \frac{s+b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0} = \frac{s+1}{s^2+5s+4} = \frac{s+1}{1} \cdot \frac{1}{s^2+5s+4} = \frac{Y(s)}{Z(s)} \cdot \frac{Z(s)}{U(s)}$$

$$u'(t) + u(t) = y''(t) + 5y'(t) + 4y(t)$$

$$u(t) = z''(t) + 5z'(t) + 4z(t)$$

$$y(t) = z'(t) + z(t)$$

$$x_1(t) = z(t)$$

$$y(t) = x_2(t) + x_1(t)$$

$$x_2(t) = z'(t)$$

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = u(t) - 5x_2(t) - 4x_1(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + 0 u(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 1)$$

$$D = 0$$

Zpětný převod:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (64)$$

$$\det = s^2 + 5s + 4$$

$$\begin{aligned} G(s) &= (1 \ 1) \cdot \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 = (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -4 & s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + 5s + 4} = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 4} \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 4}$$

Určení matice říditelnosti a pozorovatelnosti:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$R = (B; A \cdot B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det R = -1 \neq 0 \quad \text{je říditelný a dosažitelný}$$

$$C = (1 \ 1)$$

$$P = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \end{pmatrix} = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

$$\det P = 0 \quad \text{je nepozorovatelný a nerekonstruovatelný}$$

Vidíme, že determinant matice R se nerovná nule, systém je tedy říditelný a dosažitelný. Naproti tomu determinant matice P se rovná nule, systém je nepozorovatelný a tedy i nerekonstruovatelný.



### 2.4.6 Závěr protokolu č.2 – syntéza RO a vnitřní popis pro aperiodickou soustavu

Zadaný přenos soustavy:  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$

Rozhodli jsme, že pro naši soustavu budeme navrhovat regulátor typu PI, který se v praxi hojně používá.

Pomocí kritéria stability jsme navrhli spojitý regulátor a simulačně ověřili jeho funkčnost v prostředí MATLAB-SIMULINK

Obdržíme regulátor PI ve tvaru:  $G_R(s) = 3,5 + \frac{1}{s}$

Porovnáme-li tuto metodu návrhu regulátoru s metodami Åströмова a modifikovaná Ziegler–Nicholsova vidíme, že ustálení regulované veličiny na žádané hodnotě trvá nejdélejší dobu. Naproti tomu nemusí regulátor tolik zasahovat.

Dále jsme navrhli spojitý regulátor dvěma metodami, který zajišťuje stabilní regulační pochod a sledování žádané veličiny. Řízení systému jsme simulovali.

a) jsme použili *Åströmovu metodu*

Navrhli jsme PI regulátor:  $G_R(s) = 45,9184 + \frac{122,8422}{s}$

U této metody návrhu regulátoru vidíme „rychlé“ ustálení regulované veličiny na žádané hodnotě. Regulátor musí více zasahovat do regulačního pochodu.

Metoda je vhodná pro aperiodické přechodové charakteristiky.

b) Nastavení z přechodové charakteristiky (*modifikovaná Ziegler–Nicholsova metoda*)

Navrhli jsme PI regulátor ve tvaru:  $G_R(s) = 45,8754 + \frac{105,1948}{s}$

Na obr.26 vidíme podobný průběh jako u předchozí metody. Srovnáme-li obrázky důkladněji, můžeme říct že regulační pochod je „lepší“ než u předchozí metody.

K danému systému jsme přidali dopravní zpoždění  $\Theta \in \langle 10 \rangle$  a řídili jej pomocí regulátoru navrženého modifikovanou Ziegler–Nicholsovou metodou a to nejprve v základním regulačním obvodu a poté pomocí Smithova prediktoru.

Regulátor PI jsme navrhli ve tvaru:  $G_R(s) = 45,8754 + \frac{105,1948}{s}$

Z obr.27 opět vidíme jak velký vliv na stabilitu celého systému má dopravní zpoždění.

Celý systém se stává nestabilním.

Můžeme říct, že Smithův prediktor má velký vliv na stabilitu systému s dopravním zpožděním.

V dalším kroku jsme navrhovali strukturu řízení 1DOF a 2 DOF .

Při výpočtu parametrů regulátoru jsme použili m-file v program MATLAB

a) pro 1DOF

Zvolíme za parametr  $m = 1,5$  obdržíme tak regulátor ve tvaru:

$$G_R(s) = \frac{4,5s^2 + 9,5s + 5,0625}{s(s+1)}$$

Regulaci jsme simulovali pro několik hodnot ladícího parametru  $m$ , přičemž „optimální“ regulační pochod zajistíme pro  $m = 1,5$ . Při zvyšování  $m$  se urychlí regulační pochod. Naproti tomu vzniká nežádoucí stále vyšší nadkmit. Jednak u regulované veličiny ale i u regulačního zásahu.

b) pro 2DOF

Zvolíme-li za  $m = 3$  dostaneme:

$$G_{ZV}(s) = \frac{3s+11}{s+4}$$

$$G_{PV}(s) = \frac{27}{s+4}$$

Opět jsme provedli simulaci pro několik parametr  $m$ .

„Vhodný“ průběh regulačního pochodu je pro  $m = 3$  dále při zvyšujícím se parametru  $m$  se krátí čas regulace. Naproti tomu narůstá nadkmit u regulačního zásahu.

Dosadili jsme hodnoty ze zadání do přenosu  $G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+4}$  a k tomuto systému napsali

stavový popis. Ze stavového popisu jsme získali zpět přenosovou funkci a následně sestavili matice říditelnosti a pozorovatelnosti. Došli jsme k závěru, že systém je říditelný a dosažitelný, ale nepozorovatelný a nerekonstruovatelný.

## 2.5 Protokol č.3 mnohorozměrový systém

Je dán mnohorozměrný systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy:

$$\begin{aligned} y_1'(t) + y_1(t) + 6y_2(t) &= 0,5u_1(t) + u_2(t) \\ y_1(t) + 2y_2'(t) + y_2(t) &= u_1(t) + 4u_2(t) \end{aligned} \quad (65)$$

### 2.5.1 Určení levého a pravého maticového zlomku

*Určete maticový zlomek levý a pravý.*

Po aplikaci L-transformace na soustavu rovnic (65) dostaneme:

$$(s+1)Y_1 + 6Y_2 = 0,5U_1 + U_2$$

$$Y_1 + (2s+1)Y_2 = U_1 + 3U_2$$

maticový zápis:

$$\begin{pmatrix} s+1 & 6 \\ 1 & 2s+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Levý maticový zlomek je:

$$G = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} s+1 & 6 \\ 1 & 2s+1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet pravého maticového zlomku využijeme sloupcových úprav a následujícího schématu:

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{X} & -\mathbf{B}_p \\ \mathbf{Y} & \mathbf{A}_p \end{array} \right) \quad (66)$$

Tedy konkrétně, pro náš případ :

$$\begin{pmatrix} s+1 & 6 & | & 0,5 & 1 \\ 1 & 2s+1 & | & 1 & 3 \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.sl. \cdot 2 \Rightarrow} \begin{pmatrix} s+1 & 6 & | & 1 & 1 \\ 1 & 2s+1 & | & 2 & 3 \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 2 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1 \cdot 3.sl.) \text{ ke } 4.sl. \Rightarrow} \begin{pmatrix} s+1 & 6 & | & 1 & 0 \\ 1 & 2s+1 & | & 2 & 1 \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 2 & -2 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2 \cdot 4. \text{sl.}) \text{ ke } 3. \text{sl.}} \left( \begin{array}{cc|cc} s+1 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2s+1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (-s \cdot 3. \text{sl.}) \text{ k } 1. \text{sl.} \\ (-2s \cdot 4. \text{sl.}) \text{ ke } 2. \text{sl.} \end{array}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6s & 4s & 6 & -2 \\ 2s & -2s & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (-1 \cdot 4. \text{sl.}) \text{ k } 1. \text{sl.} \\ (-6 \cdot 3. \text{sl.}) \text{ ke } 2. \text{sl.} \end{array}}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6s+2 & 4s-36 & 6 & -2 \\ 2s-1 & -2s+12 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (-1 \cdot 1. \text{sl.}) \text{ ke } 3. \text{sl.} \\ (-1 \cdot 2. \text{sl.}) \text{ ke } 4. \text{sl.} \end{array}} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -6s+2 & 4s-36 & 6s+4 & -4s+34 \\ 2s-1 & -2s+12 & -2s-1 & 2s-11 \end{array} \right)$$

Výsledkem je pravý maticový zlomek:

$$G = B_P \cdot A_P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6s+4 & -4s+34 \\ -2s-1 & 2s-11 \end{pmatrix}^{-1}$$

Chceme-li vypočítat přenosovou matici, získáme:

$$G = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} s+1 & 6 \\ 1 & 2s+1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2s^2 + 3s - 5} \cdot \begin{pmatrix} s-5,5 & 2s-17 \\ s+0,5 & 3s+2 \end{pmatrix}$$

Respektive

$$G = B_P \cdot A_P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6s+4 & -4s+34 \\ -2s-1 & 2s-11 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4s^2 + 6s - 10} \cdot \begin{pmatrix} 2s-11 & 4s-34 \\ 2s+1 & 6s+4 \end{pmatrix}$$

Po roznásobení do tvaru matice se čtyřmi racionálními funkcemi lomenými a zkrácení je vidět, že jsme přes pravý i levý maticový zlomek dospěli k téže přenosové matici  $G$ .

## 2.5.2 Rozhodnutí o stabilitě systému

**Rozhodněte o stabilitě daného systému:**

O stabilitě systému rozhodneme jednoduše a to podle:

$$(\det A = 2s^2 + 3s - 5) \cong (\det A_P = 4s^2 + 6s - 10)$$

Vidíme, že determinant matice  $A$  (resp.  $A_P$ ) je nestabilní polynom. Systém je nestabilní.

### 2.5.3 Návrh spojitého dvourozměrného regulátoru

*Navrhnete spojitý dvourozměrný regulátor a simulujte řízení:*

Umístění pólů pro asymptotické sledování žádané veličiny lze vyjádřit maticovou Diofantickou rovnicí:

$$AFP_p + BQ_p = M \quad (67)$$

Pro zvolené póly  $m_1 = -1$  a  $m_2 = -2$ , bude pro matici  $M$  platit:

$$M = \begin{pmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix}$$

Matice  $F$  bude ve tvaru:

$$F = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

Pro vyřešení rovnice (67) využijeme elementárních sloupcových úprav a přepíšeme je na:

$$\left( \begin{array}{c|c} AF & B \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline P_p & -B_p \\ Q_p & A_p \end{array} \right) \quad (68)$$

Dosadíme naše hodnoty a upravíme:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 6s & 0,5 & 1 \\ s & 2s^2 + s & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3.\text{sl.} \cdot 2 \Rightarrow} \left( \begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 6s & 1 & 1 \\ s & 2s^2 + s & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1 \cdot 3.\text{sl.}) \text{ ke } 4.\text{sl.} \Rightarrow}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 6s & 1 & 0 \\ s & 2s^2 + s & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2 \cdot 4.\text{sl.}) \text{ ke } 3.\text{sl.} \Rightarrow} \left( \begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 6s & 1 & 0 \\ s & 2s^2 + s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (-6s \cdot 3.\text{sl.}) \text{ ke } 2.\text{sl.} \Rightarrow \\ (-s \cdot 4.\text{sl.}) \text{ k } 1.\text{sl.} \Rightarrow \end{array}}$$

$$\left( \begin{array}{cc|cc} s^2 + s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2s^2 + s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2s & -36s & 6 & -2 \\ -s & 12s & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{((s+1)3..sl.)k 1..sl. \\ ((7s+8)4..sl.)ke 2..sl.}} \left( \begin{array}{cc|cc} s^2 + 2s + 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2s^2 + 8s + 8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8s + 6 & -50s - 16 & 6 & -2 \\ -3s - 2 & 19s + 8 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Odečteme matice s její pomocí je popsán regulátor:

$$P_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Q_p = \begin{pmatrix} 8s + 6 & -50s - 16 \\ -3s - 2 & 19s + 8 \end{pmatrix}$$

Následně budeme realizovat zákon řízení. Můžeme provést jak přes pravý ( $FU = Q_p P_p^{-1} E$ ), tak přes levý ( $PFU = QE$ ) maticový zlomek. Otočení maticového zlomku na levý není nutné. Ukážeme si jak je to v našem případě jednoduché. Platí ( $Q_p P_p^{-1} = P^{-1} Q$ ) a protože  $P_p$  je jednotková matice, je jasné, že  $P = P_p$  a  $Q = Q_p$ .

Zákon řízení s využitím levého maticového zlomku je:

$$PFU = Q(W - Y) \tag{69}$$

$$PFU = QE \tag{70}$$

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8s + 6 & -50s - 16 \\ -3s - 2 & 19s + 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Roznásobíme a převedeme do časové oblasti, pak dostaneme:

$$u_1' = 8e_1' + 6e_1 - 50e_2' - 16e_2$$

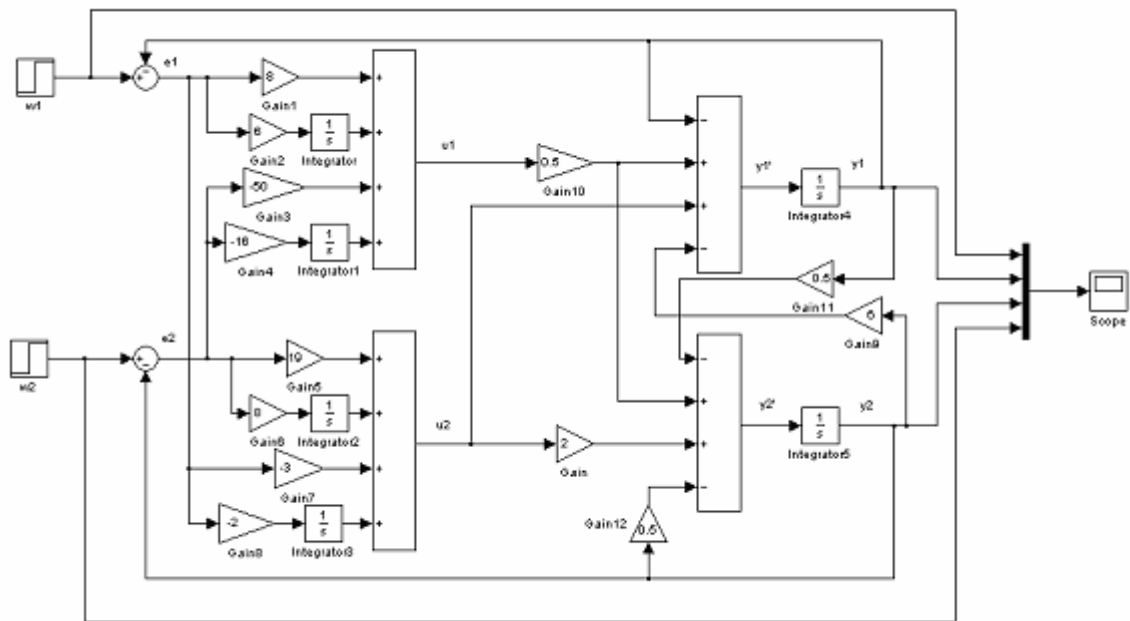
$$u_2' = -3e_1' - 2e_1 + 19e_2' + 8e_2$$

Integrujeme a získáme tak finální rovnice definující dvourozměrný regulátor:

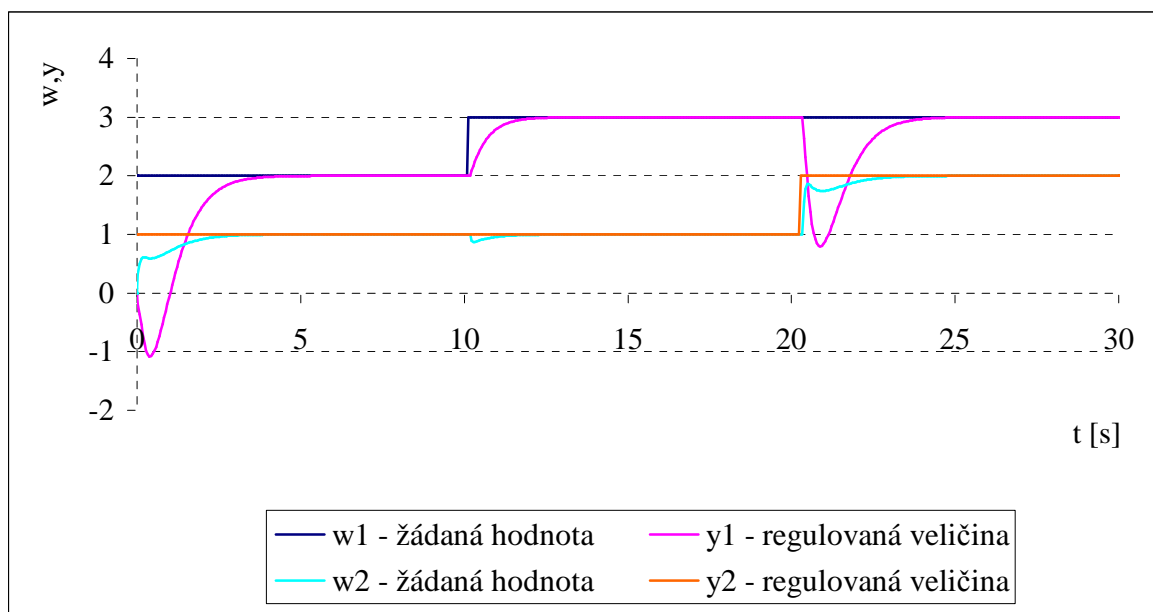
$$u_1 = 8e_1 + 6 \int e_1 - 50e_2 - 16 \int e_2$$

$$u_2 = -3e_1 - 2 \int e_1 + 19e_2 + 8 \int e_2$$

Pro simulaci použijeme následující schéma:



Obr.31 Vytvořené schéma k simulaci zadaného dvourozměrného systému



Obr.32 Simulace regulačního pochodu dvourozměrného systému

Z obrázku vidíme, že náš dvourozměrný systém dává stabilní regulační pochod.

Do obrázku jsme nevykreslili průběhy akčních zásahů, protože by obrázek nebyl tak přehledný.

### 2.5.4 Závěr protokolu č.3 mnohorozměrný systém

Máme daný mnohorozměrný systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy:

$$y_1'(t) + y_1(t) + 6y_2(t) = 0,5u_1(t) + u_2(t)$$

$$y_1(t) + 2y_2'(t) + y_2(t) = u_1(t) + 4u_2(t)$$

Dále jsme určili levý a pravý maticový zlomek:

$$\text{Levý maticový zlomek je: } G = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} s+1 & 6 \\ 1 & 2s+1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pro výpočet pravého maticového zlomku jsme využili sloupcových úprav a následujícího schématu:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline X & -B_p \\ Y & A_p \end{array} \right)$$

Po úpravě jsme obdrželi:

$$\text{Pravý maticový zlomek je: } G = B_p \cdot A_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6s+4 & -4s+34 \\ -2s-1 & 2s-11 \end{pmatrix}^{-1}$$

O stabilitě systému jsme rozhodli podle:

$$(\det A = 2s^2 + 3s - 5) \cong (\det A_p = 4s^2 + 6s - 10)$$

Vidíme, že determinant matice  $A$  (resp.  $A_p$ ) je nestabilní polynom. Systém je nestabilní.

Nakonec jsme navrhli spojitý dvourozměrný regulátor a simulovali jeho řízení:

úlohu umístění pólů pro asymptotické sledování žádané veličiny jsme vyjádřili maticovou Diofantickou rovnicí:

$$AFP_p + BQ_p = M$$

Zvolili jsme póly  $m_1 = -1$  a  $m_2 = -2$ , pro matici  $M$  platí:

$$M = \begin{pmatrix} (s+1)^2 & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{pmatrix}$$

V tomhle případě jsme využili následujícího schématu:

$$\left( \begin{array}{c|c} AF & B \\ \hline I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline P_p & -B_p \\ Q_p & A_p \end{array} \right)$$

Dosadili jsme naše hodnoty a upravili.

Dostali jsme matice s její pomocí je popsán regulátor:

$$P_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad Q_p = \begin{pmatrix} 8s+6 & -50s-16 \\ -3s-2 & 19s+8 \end{pmatrix}$$



Zákon řízení kde jsme využili levého maticového zlomku:

$$PFU = Q(W - Y)$$

$$PFU = QE$$

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8s+6 & -50s-16 \\ -3s-2 & 19s+8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Roznásobili jsme a převedli do časové oblasti.

Po integraci jsme získali finální rovnice definující dvourozměrný regulátor:

$$u_1 = 8e_1 + 6 \int e_1 - 50e_2 - 16 \int e_2$$

$$u_2 = -3e_1 - 2 \int e_1 + 19e_2 + 8 \int e_2$$

Na Obr.32 vidíme stabilní regulační pochod našeho dvourozměrného systému

## ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo navrhnout konkrétní hodnoty parametrů přenosů jednotlivých soustav pro studenty a na ukázkou vzorově vypracovat zápočtové protokoly k předmětu „*Teorie automatického řízení I*“. Protokolů bylo celkem pět. První dva byly navrženy pro vnější popis a analýzu LSDS pro periodickou a následně i aperiodickou soustavu. Třetí a čtvrtý protokol byl zaměřen na syntézu RO a vnitřní popis systému. Opět pro periodickou a poté aperiodickou soustavu. Poslední protokol byl vypracován pro zadaný mnohorozměrný systém, který má dva vstupy a výstupy. Konkrétně jsme určovali pravý a levý maticový zlomek a určovali stabilitu systému. Nakonec jsme pro danou dvou rozměrnou soustavu navrhovali spojitý dvourozměrný regulátor a simulovali jeho řízení. Příklady jsou řešené tak, aby jich studenti mohli využít pro doplnění svých poznatků při řešení zápočtových protokolů.

Dalším úkolem bylo shrnout vyučovanou látku, tedy nastítnit jakýsi skelet podle něhož se studenti dozví co mohou od předmětu „*Teorie automatického řízení I*“ očekávat.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Prokop, R., Matušů, R., Prokopová, Z.: Teorie automatického řízení - lineární spojité dynamické systémy. UTB ve Zlíně, Zlín 2006.
- [2] Balátě, J.: Automatické řízení. BEN - technická literatura, Praha, 2003.
- [3] Švarc, I.: Automatizace, Automatické řízení. Akademické nakladatelství CERM, Brno, 2002.
- [4] Šulc, B., Vítečková, M.: Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004.

**SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK**

D	Diskriminant
LSDS	Lineární spojitý dynamický systém
RO	Regulační obvod
s	Operátor komplexní proměnné
y(t)	Originál výstupu z regulované soustavy
Y(s)	Obraz výstup z regulované soustavy
u(t)	Originál vstupu do regulované soustavy
U(s)	Obraz vstup do regulované soustavy
G(s)	Přenos regulované soustavy
G <sub>R</sub> (s)	Přenos regulátoru
G <sub>ZV</sub> (s)	Zpětnovazební regulátor
G <sub>PV</sub> (s)	Přímovazební regulátor
h(t)	Originál přechodové charakteristiky
H(s)	Obrazu přechodové charakteristiky
i(t)	Originál impulsové charakteristiky
I(s)	Obraz obrazu impulsové charakteristiky
LT	Laplaceova transformace
$\omega$	Úhlová rychlost
G(j $\omega$ )	Frekvenční přenos
A( $\omega$ )	Amplitudy přenosu
$\varphi(\omega)$	Fáze přenosu
T <sub>u</sub>	Doba průtahu
T <sub>n</sub>	Doba náběhu
K	Zesílení

$K_P$	Proporcionální konstanta
$T_I$	Integrační konstanta
$m$	Ladící parametr

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr.1	Přechodová charakteristika pro periodickou soustavu .....	15
Obr.2	Impulsová charakteristika pro periodickou soustavu .....	17
Obr.3	Nyquistova křivka pro periodickou soustavu .....	19
Obr.4	Amplitudová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích pro periodickou soustavu .....	20
Obr.5	Fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích pro periodickou soustavu .....	21
Obr.6	Přechodová charakteristika pro aperiodickou soustavu .....	26
Obr.7	Impulsová charakteristika pro aperiodickou soustavu .....	28
Obr.8	Nyquistova křivka pro aperiodickou soustavu .....	30
Obr.9	Amplitudová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích pro aperiodickou soustavu .....	31
Obr.10	Fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích pro aperiodickou soustavu .....	31
Obr.11	Simulační schéma základního RO .....	35
Obr.12	Simulace regulačního pochodu pomocí regulátoru navrženém metodou kritériem stability pro periodický systém .....	35
Obr.13	Simulace regulačního pochodu regulátorem navrženým Whiteleyho metodou pro periodickou soustavu .....	37
Obr.14	Určení parametrů $K$ , $T_u$ a $T_n$ z přechodové charakteristika regulované soustavy .....	38
Obr.15	Simulace regulace s využitím modifikované Ziegler–Nicholsovi metody pro periodický systém .....	39
Obr.16	Simulační schéma základního RO s dopravním zpožděním .....	40
Obr.17	Simulace regulačního pochodu bez použití Smithova prediktoru pro periodický systém .....	40
Obr.18	Simulační schéma regulačního obvodu Smithův prediktor .....	41
Obr.19	Simulace regulačního pochodu s využitím Smithova prediktoru pro periodický systém .....	41
Obr.20	Simulační schéma vytvořené k simulaci struktury řízení 1DOF .....	44
Obr.21	Simulace regulačního pochodu strukturou řízení 1DOF pro periodickou soustavu .....	44
Obr.22	Simulační schéma vytvořené k simulaci struktury řízení 2DOF .....	47
Obr.23	Simulace regulačního pochodu strukturou řízení 2DOF pro periodickou soustavu .....	48
Obr.24	Simulace regulačního pochodu s využitím kritéria stability pro aperiodickou soustavu .....	53
Obr.25	Simulace regulačního pochodu pomocí Åströmovi metody pro aperiodickou soustavu .....	54
Obr.26	Simulace regulačního pochodu s využitím modifikované Ziegler–Nicholsovi metody pro aperiodickou soustavu .....	55
Obr.27	Simulace regulačního pochodu bez použití Smithova prediktoru pro aperiodickou soustavu .....	56
Obr.28	Simulace regulačního pochodu s využitím Smithova prediktoru pro aperiodickou soustavu .....	57
Obr.29	Simulace regulačního pochodu strukturou řízení 1DOF pro aperiodickou soustavu .....	59
Obr.30	Simulace regulačního pochodu strukturou řízení 2DOF pro aperiodickou soustavu .....	62
Obr.31	Vytvořené schéma k simulaci zadaného dvourozměrného systému .....	71
Obr.32	Simulace regulačního pochodu dvourozměrného systému .....	71

**SEZNAM TABULEK**

Tab.1	Vybraná data na vykreslení Nyquistovy křivky pro periodickou soustavu.....	19
Tab.2	Vybrané hodnoty k vykreslení Nyquistovy křivky pro aperiodickou soustavu. ....	29
Tab.3	Hodnoty pro výpočet parametrů regulátoru za $n=3$ , Whiteleyovy standardní tvary .....	36
Tab.4	Parametry regulátoru pro modifikovanou Ziegler-Nicholovu metodu .....	38

## SEZNAM PŘÍLOH

P 1 :	Vytvořený m-file pro strukturu řízení 1DOF .....	81
P 2 :	Vytvořený m-file pro strukturu řízení 2DOF .....	81
P 3 :	Návrh číselných hodnot jednotlivých soustav .....	82



**P 1 : Vytvořený m-file pro strukturu řízení 1DOF**

% 1DOF polynomiální syntéza pro systém druhého řádu a pro skokovou změnu žádané  
% veličiny s využitím řešení soustavy rovnic přes matice

% parametry soustavy

Ts=60;

b0=1;

a2=1;

a1=5;

a0=4;

m=1.5;

b=[b0];

a=[a2 a1 a0];

% pořadí: p1 p0 q2 q1 q0

A=[a2 0 0 0 0; a1 a2 0 0 0; a0 a1 b0 0 0; 0 a0 0 b0 0; 0 0 0 0 b0]

d=[1 4\*m 6\*m^2 4\*m^3 m^4]'

x=A\d

p=[x(1) x(2) 0]

q=[x(3) x(4) x(5)]

sim('jedna\_DOF')

jedna\_DOF

**P 2 : Vytvořený m-file pro strukturu řízení 2DOF**

% 2DOF polynomiální syntéza pro systém druhého řádu a pro skokovou změnu žádané  
% veličiny s využitím řešení soustavy rovnic přes matice

Ts=60;

b0=1;

a2=1;

a1=5;

a0=4;

m=3;

b=[b0];

a=[a2 a1 a0];

%ap+bq=d

%pořadí: p1 p0 q1 q0

A=[a2 0 0 0; a1 a2 0 0 ; a0 a1 b0 0; 0 a0 0 b0]

d=[1 3\*m 3\*m^2 m^3]'

x=A\d

%ft+br=d

%pořadí: t2 t1 t0 r0

C=[1 0 0 0; 0 1 0 0 ; 0 0 1 0; 0 0 0 b0]

y=C\d

p=[x(1) x(2)]

q=[x(3) x(4)]

r=y(4)

sim('dva\_DOF')

dva\_DOF

**P 3 : Návrh číselných hodnot jednotlivých soustav**

č.	a <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>0</sub>	b <sub>0</sub>	č.	a <sub>2</sub>	a <sub>1</sub>	a <sub>0</sub>	b <sub>0</sub>
1	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 1	51	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 1
2	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 2	52	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 2
3	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 3	53	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 3
4	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 4	54	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 4
5	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 5	55	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 5
6	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 6	56	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 6
7	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 7	57	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 7
8	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 8	58	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 8
9	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 1	a <sub>0</sub> = 1	b <sub>0</sub> = 9	59	a <sub>2</sub> = 1	a <sub>1</sub> = 7	a <sub>0</sub> = 12	b <sub>0</sub> = 9

10	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 1$	$b_0 = 10$	60	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 12$	$b_0 = 10$
11	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 1$	61	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 1$
12	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 2$	62	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 2$
13	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 3$	63	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 3$
14	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 4$	64	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 4$
15	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 5$	65	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 5$
16	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 6$	66	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 6$
17	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 7$	67	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 7$
18	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 8$	68	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 8$
19	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 9$	69	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 9$
20	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 4$	$b_0 = 10$	70	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 6$	$b_0 = 10$
21	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 1$	71	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 1$
22	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 2$	72	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 2$
23	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 3$	73	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 3$
24	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 4$	74	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 4$
25	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 5$	75	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 5$
26	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 6$	76	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 6$
27	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 7$	77	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 7$
28	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 8$	78	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 8$
29	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 9$	79	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 9$
30	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$	$a_0 = 2$	$b_0 = 10$	80	$a_2 = 1$	$a_1 = 6$	$a_0 = 8$	$b_0 = 10$
31	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 1$	81	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 1$
32	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 2$	82	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 2$
33	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 3$	83	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 3$
34	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 4$	84	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 4$
35	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 5$	85	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 5$
36	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 6$	86	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 6$
37	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 7$	87	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 7$
38	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 8$	88	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 8$
39	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 9$	89	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 9$
40	$a_2 = 1$	$a_1 = 5$	$a_0 = 6$	$b_0 = 10$	90	$a_2 = 1$	$a_1 = 4$	$a_0 = 8$	$b_0 = 10$
41	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 1$	91	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 1$
42	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 2$	92	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 2$

43	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 3$	93	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 3$
44	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 4$	94	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 4$
45	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 5$	95	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 5$
46	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 6$	96	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 6$
47	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 7$	97	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 7$
48	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 8$	98	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 8$
49	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 9$	99	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 9$
50	$a_2 = 1$	$a_1 = 2$	$a_0 = 4$	$b_0 = 10$	100	$a_2 = 1$	$a_1 = 7$	$a_0 = 10$	$b_0 = 10$